

PARADOJA DE LOS GEMELOS

Homero y Ulises son gemelos idénticos. Ulises realiza un viaje a una velocidad muy elevada hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la Tierra mientras Homero permanece en ella. Cuando se reúnen de nuevo, ¿cuál de los gemelos es más viejo, o son ambos de la misma edad? La respuesta correcta es que Homero, el gemelo que permaneció en su casa, es más viejo. El problema es una paradoja debido al papel aparentemente simétrico que juegan ambos gemelos frente al resultado asimétrico que se obtiene para su edad. La paradoja se resuelve cuando se observa la asimetría del papel de ambos gemelos. El resultado relativista está en conflicto con el sentido común que se basa en nuestra creencia fuerte, pero incorrecta, de la existencia de una simultaneidad absoluta. Consideremos un caso particular con ciertos valores numéricos que, aunque sea impracticable, hace que los cálculos sean más sencillos.

Supongamos que el planeta P y Homero situado en la Tierra y distante L_p del anterior están fijos en el sistema de referencia S, según se ve en la figura. Despreciemos el movimiento de la Tierra. Los sistemas de referencia S' y S'' se están moviendo con velocidad V hacia el planeta P y alejándose de él respectivamente. Ulises acelera rápidamente hasta alcanzar la velocidad V ; luego viaja con velocidad de crucero en S' hasta que alcanza el planeta que es cuando se detiene quedando momentáneamente en reposo en S. Para volver, acelera rápidamente hasta la velocidad V hacia la Tierra y viaja en S'' hasta que la alcanza, deteniéndose finalmente. Podemos admitir que los tiempos de aceleración son despreciables en comparación con los tiempos de vuelo de crucero.

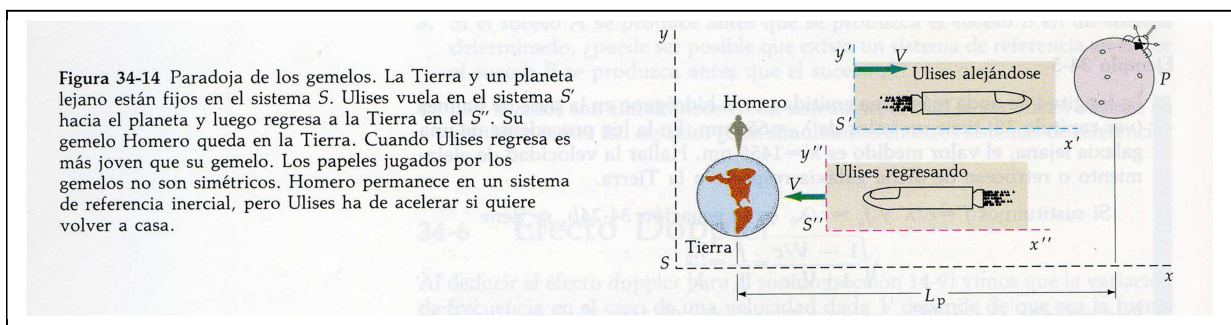
Para ilustrar el problema podemos utilizar los valores siguientes:

$$L_p = 8 \text{ años} - \text{luz}$$

$$V = 0,8 c$$

entonces

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$



Es sencillo analizar el problema desde el punto de vista de Homero en la Tierra. De acuerdo con el reloj de Homero, Ulises está viajando en S' durante un tiempo $L_p/V = 10 \text{ años}$ y en S'' durante otro tiempo igual. Así pues Homero es 20 años más viejo cuando Ulises regresa. El intervalo de tiempo en S' entre el momento de abandonar la Tierra y llegar al planeta P es más corto debido a su tiempo propio. El tiempo para alcanzar el planeta en el reloj de Ulises es

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10 \text{ años}}{5/3} = 6 \text{ años}$$

Puesto que se requiere el mismo tiempo para el viaje de vuelta, Ulises habrá anotado 12 años para el viaje de ida y vuelta y será 8 años más joven que Homero.

Desde el punto de vista de Ulises, el cálculo de su tiempo de viaje no es difícil. La distancia de la Tierra al planeta P está contraída y es sólo

$$L' = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{8 \text{ años-luz}}{5/3} = 4,8 \text{ años-luz}$$

Para $V = 0,8 c$, emplearía sólo 6 años en cada parte del viaje.

La dificultad real de este problema consiste en que Ulises ha de comprender por qué su gemelo ha envejecido en 20 años durante su ausencia. Si consideramos a Ulises en reposo y a Homero moviéndose, su reloj atrasará y deberá medir sólo $(3/5) \cdot 6 = 3,6 \text{ años}$. Entonces, ¿por qué no ha envejecido Homero sólo 7,2 años durante el viaje completo? Como es natural, aquí radica la paradoja. La dificultad en el caso del análisis desde el punto de vista de Ulises es que no permanece en un sistema inercial. ¿Qué ocurre mientras Ulises está frenando y arrancando? Para investigar este problema con detalle necesitamos considerar los sistemas de referencia acelerados, problema relacionado con el estudio de la relatividad general y más allá del objetivo de este texto. Sería instructivo considerar que los gemelos envían señales regulares uno al otro de modo que pueden anotar la edad del otro continuamente. Si se disponen las cosas de modo que se envíe una señal cada año, la edad del otro gemelo puede determinarse simplemente contando las señales recibidas. La frecuencia de llegada de las señales no será una por año debido al desplazamiento doppler. La frecuencia observada vendrá dada por las ecuaciones del efecto doppler relativista:

$$f' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} f_o \text{ cuando se alejan y } f' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}} f_o \text{ cuando se acercan.}$$

Utilizando $V/c = 0,8$ y $V^2/c^2 = 0,64$, se tiene para el caso en que los dos gemelos se están alejando el uno del otro

$$f' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} f_o = \frac{\sqrt{1 - 0,64}}{1 + 0,8} f_o = \frac{1}{3} f_o$$

Y cuando se estén acercando: $f' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}} f_o = \frac{\sqrt{1 - 0,64}}{1 - 0,8} f_o = 3 f_o$

Consideramos la situación primero desde el punto de vista de Ulises. Durante los seis años que tarda en alcanzar el planeta P (recuérdese que la distancia se contrae en su sistema de referencia), recibe señales al ritmo de 1/3 por año, y por lo tanto recibe dos señales. Tan pronto él empieza el viaje de regreso, recibe tres señales por año; en los seis años que tarda en regresar recibirá 18 señales, dando un total de 20 durante todo el viaje. De acuerdo con ello espera que su gemelo haya envejecido estos 20 años.

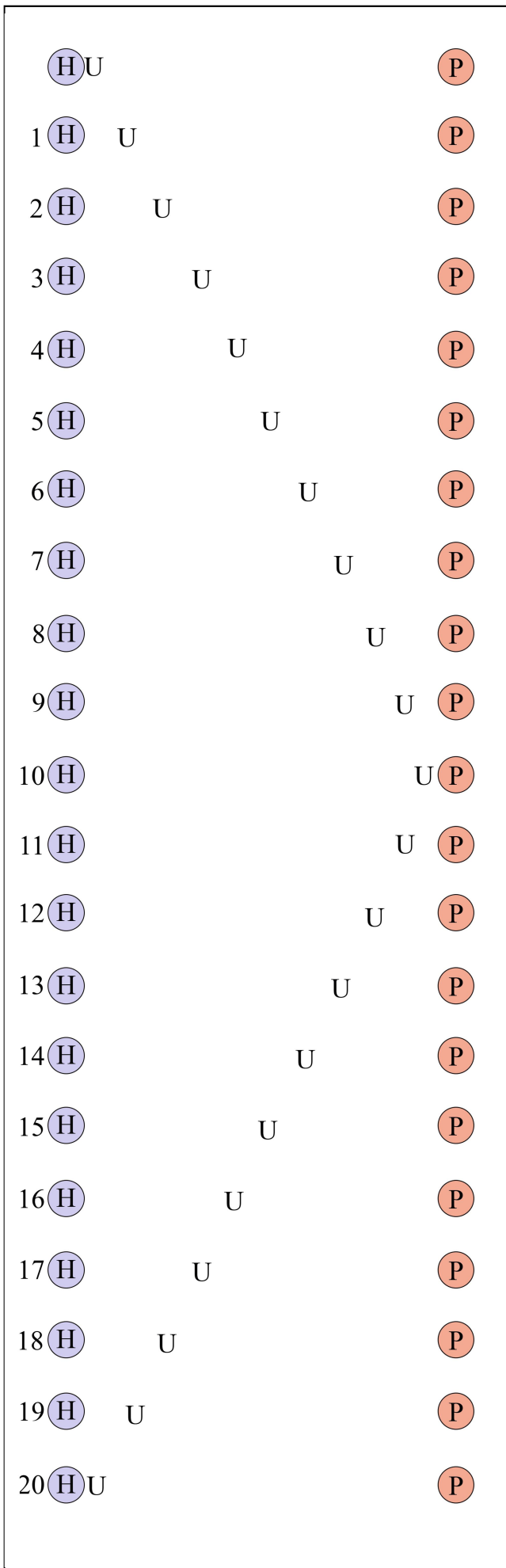
Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de Homero. Recibe señales al ritmo de 1/3 por año durante los 10 años que tarda Ulises en llegar al planeta P, y también durante el tiempo que empleará la última señal enviada por Ulises antes de que él regrese a la Tierra. (No puede saber que Ulises ha empezado el viaje de vuelta hasta que le lleguen las señales con frecuencia creciente). Puesto que el planeta está a una

distancia de 8 años-luz, se han de añadir estos 8 años en la recepción de señales a un ritmo de $1/3$ de señal por año. Durante los primeros 18 años, Homero recibe 6 señales. En los dos años finales antes de que Ulises llegue, Homero recibe 6 señales, o sea 3 por año. (La primera señal enviada después de que Ulises inicie el regreso emplea 8 años en alcanzar la Tierra, mientras que Ulises moviéndose a una velocidad de $0,8 c$, tardará 10 años en regresar y por tanto llegará exactamente dos años después de que Homero empiece a recibir señales al ritmo más elevado). Así pues Homero espera que Ulises haya envejecido 12 años. En este análisis, resulta evidente la asimetría de los papeles que juegan los dos gemelos. Ambos están de acuerdo en que, cuando se reúnan, el que ha sido acelerado será más joven que el que ha permanecido quieto en casa.

Origen de estos apuntes:

- Páginas 1, 2 y 3: Física**-3ª edición-Paul A. Tipler-Editorial Reverté.
- Páginas 4, 5 y 6: Realizado por Rafa Castillejo a partir del texto anterior.

HOMERO EN REPOSO Y ULISES SE MUEVE



DESDE EL PUNTO DE VISTA DE HOMERO

PARA HOMERO

$$(t_{IDA})_{HOMERO} = \frac{L_{HOMERO}}{V} = \frac{8 c}{0,8 c} = 10 \text{ años}$$

$$(t_{VUELTA})_{HOMERO} = \frac{L_{HOMERO}}{V} = \frac{8 c}{0,8 c} = 10 \text{ años}$$

$$(t_{TOTAL})_{HOMERO} = 20 \text{ años}$$

PARA ULISES

$$(t_{IDA})_{ULISES} = \frac{(t_{IDA})_{HOMERO}}{\gamma} = \frac{10}{5/3} = 6 \text{ años}$$

$$(t_{VUELTA})_{ULISES} = \frac{(t_{VUELTA})_{HOMERO}}{\gamma} = \frac{10}{5/3} = 6 \text{ años}$$

$$(t_{TOTAL})_{ULISES} = 12 \text{ años}$$

DESDE EL PUNTO DE VISTA DE ULISES

PARA ULISES

$$L_{ULISES} = \frac{L_{HOMERO}}{\gamma} = \frac{8 \text{ años} - \text{luz}}{5/3} = 4,8 \text{ años} - \text{luz}$$

$$(t_{IDA})_{ULISES} = \frac{L_{ULISES}}{V} = \frac{4,8 c}{0,8 c} = 6 \text{ años}$$

$$(t_{VUELTA})_{ULISES} = \frac{L_{ULISES}}{V} = \frac{4,8 c}{0,8 c} = 6 \text{ años}$$

$$(t_{TOTAL})_{ULISES} = 12 \text{ años}$$

PARA HOMERO

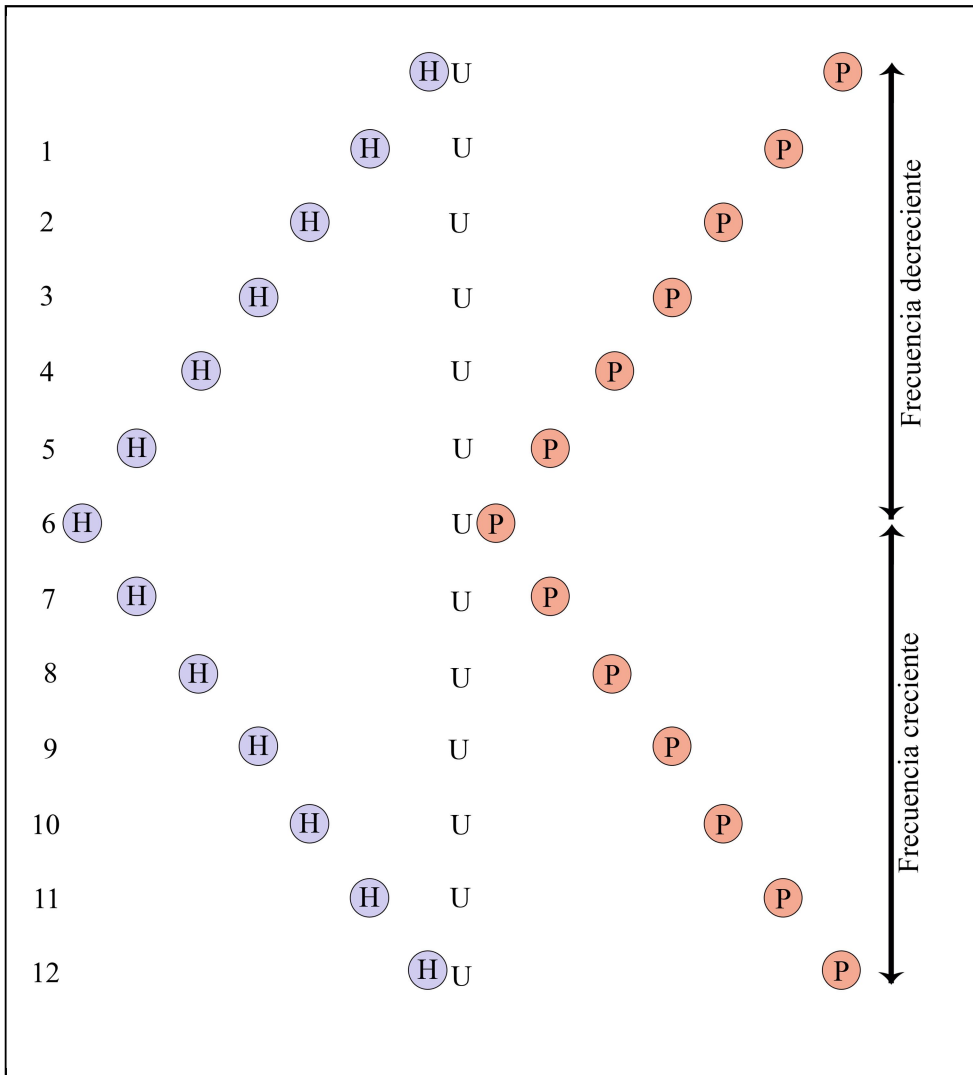
$$(t_{IDA})_{HOMERO} = \gamma \cdot (t_{IDA})_{ULISES} = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10 \text{ años}$$

$$(t_{VUELTA})_{HOMERO} = \gamma \cdot (t_{VUELTA})_{ULISES} = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10 \text{ años}$$

$$(t_{TOTAL})_{HOMERO} = 20 \text{ años}$$

HOMERO SE MUEVE Y ULISES EN REPOSO

(DESDE EL PUNTO DE VISTA DE ULISES)



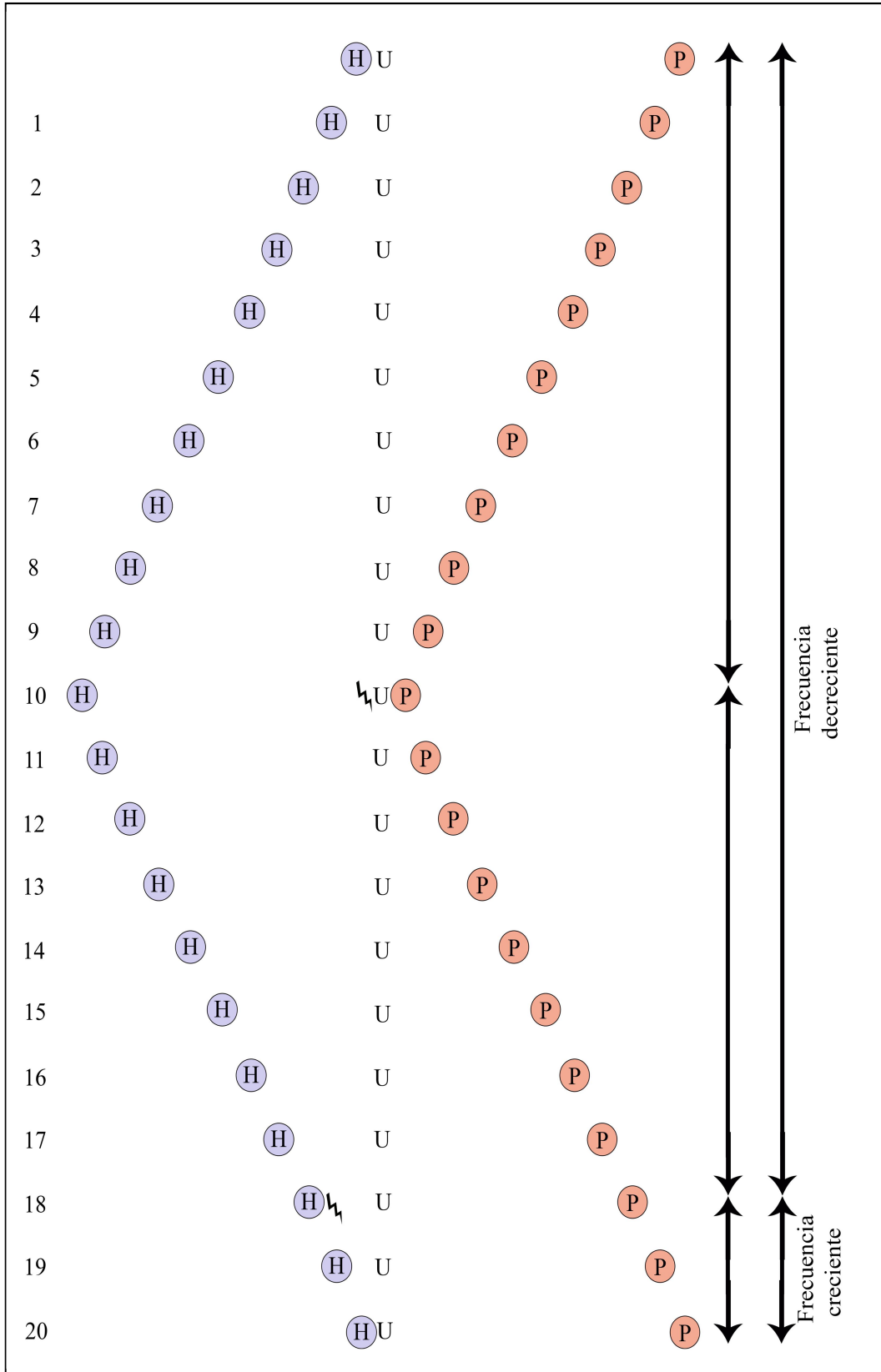
FRECUENCIA DECRECIENTE (Ida) : 6 años para Ulises $\xrightarrow{x^{\frac{1}{3}}}$ 2 años para Homero

FRECUENCIA CRECIENTE (Vuelta): 6 años para Ulises $\xrightarrow{x^3}$ 18 años para Homero

TOTAL : 12 años para Ulises \longrightarrow 20 años para Homero

HOMERO SE MUEVE Y ULISES EN REPOSO

(DESDE EL PUNTO DE VISTA DE HOMERO)



La señal que emite Ulises en el año n°10 para Homero, la recibe Homero en el año n°18.

FRECUENCIA DECRECIENTE (Ida + 8 años de vuelta): 18 años para Homero $\xrightarrow{x\frac{1}{3}}$ 6 años para Ulises

FRECUENCIA CRECIENTE (2 años de vuelta): 2 años para Homero $\xrightarrow{x^3}$ 6 años para Ulises

TOTAL: 20 años para Homero \longrightarrow 12 años para Ulises