

RELATIVIDAD ESPECIAL: EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una nave interestelar parte hacia la estrella Siria (α del Can Mayor), situada a 8,7 años luz, viajando a 0,85 c. Halla el tiempo que tarda en el viaje de ida y vuelta según:

a) Los relojes terrestres.

b) Los relojes de a bordo.

$$a) \Delta t = \frac{2 \cdot d}{v} = \frac{2 \cdot 8,7 \cdot c}{0,85 \cdot c} = 20,47 \text{ años}$$

$$b) \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{\Delta t}{1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{20,47}{1/\sqrt{1-\frac{(0,85 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{20,47}{1,898} = 10,78 \text{ años}$$

$$b) \text{ Otra forma de resolverlo: } d' = \frac{d}{\gamma} = \frac{8,7 \text{ año luz}}{1,898} = 4,58 \text{ año luz} . \text{ Luego: } \Delta t' = 2 \cdot \frac{4,58 \text{ año luz}}{0,85 \cdot c} = 10,78 \text{ años}$$

2. Un astronauta de 35 años de edad emprende una misión interestelar a bordo de una nave que tiene previsto viajar a una velocidad de 0,9 c . En la Tierra deja un hijo de 5 años. ¿Cuánto tiempo habrá de durar la misión para que el astronauta tenga, a su regreso, la misma edad que su hijo? Calcula dicho tiempo en los dos sistemas de referencia.

$$\text{Partimos de la siguiente igualdad: } 35 + \Delta t' = 5 + \Delta t \Rightarrow \{\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'\} \Rightarrow 35 + \Delta t' = 5 + \gamma \cdot \Delta t' \Rightarrow 30 = \Delta t'(\gamma - 1)$$

$$\text{Calculamos el factor gamma: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,9 \cdot c)^2}{c^2}}} = 2,294$$

$$30 = \Delta t'(\gamma - 1) \Rightarrow \Delta t' = \frac{30}{(\gamma - 1)} = \frac{30}{(2,294 - 1)} = 2318 \text{ años}$$

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = 2,294 \cdot 2318 = 5318 \text{ años}$$

3. La vida media de un pion que se mueve a gran velocidad resulta ser de 60 ns, mientras que su vida media en reposo es de 26 ns. Calcula:

a) La velocidad a la que se mueve el pion.

b) La distancia que recorre el pion en el sistema de referencia terrestre y en su propio sistema.

$$\Delta t = 60 \text{ ns y } \Delta t' = 26 \text{ ns}$$

$$a) \Delta t = \gamma \cdot \Delta t' \Rightarrow 60 = \gamma \cdot 26 \Rightarrow \gamma = 2,307$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2,307 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{2,307^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{2,307^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{2,307^2}} = 0,90 \Rightarrow v = 0,90 \cdot c$$

$$b) d = v \cdot \Delta t = 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 60 \cdot 10^{-9} = 16,20 \text{ m}$$

$$d' = v \cdot \Delta t' = 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 26 \cdot 10^{-9} = 7,02 \text{ m}$$

4. Un protón tiene una energía en reposo de 938 MeV. Calcula la velocidad y el momento lineal cuando su energía resulte ser de 1450 MeV. (Nota: expresar el momento lineal de MeV/c).

$$E_o = 938 \text{ MeV} \text{ y } E_{\text{total}} = 1450 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{total}} = \gamma \cdot m_o \cdot c^2 = \gamma \cdot E_o \Rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{total}}}{E_o} = \frac{1450}{938} = 1'546$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1'546^2}} = 0'76 \Rightarrow v = 0'76 \cdot c$$

$$P_{\text{relativista}} = \gamma \cdot m_o \cdot v = 1'546 \cdot m_o \cdot 0'76 \cdot c = \frac{1'546 \cdot m_o \cdot 0'76 \cdot c^2}{c} = \frac{1'546 \cdot 0'76 \cdot m_o \cdot c^2}{c} = \frac{1'546 \cdot 0'76 \cdot 938}{c} = 11021 \frac{\text{MeV}}{c}$$

5. María y Ana son dos gemelas que tienen 30 años de edad. María emprende un viaje de ida y vuelta a la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz de la Tierra, a una velocidad de 0,95 c . ¿Qué edades tendrán las dos hermanas cuando María regrese a la Tierra?

$$\text{Calculamos el factor gamma: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0'95 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0'312} = 3'20$$

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2 \cdot 8'7 \cdot c}{0'95 \cdot c} = 18'316 \text{ años} \Rightarrow \text{Edad para Ana: } 30 + 18,316 = 48,32 \text{ años}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{18'316}{3,20} = 5'724 \text{ años} \Rightarrow \text{Edad para María: } 30 + 5,724 = 35,72 \text{ años}$$

6. Un neutrón se mueve con una velocidad de 0,9 c. Sabiendo que la masa en reposo del neutrón es 1,675 10^{-27} kg, calcula:

a) La masa relativista.

b) El momento lineal.

$$\text{a) Calculamos el factor gamma: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0'9 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0'81}} = 2'294$$

$$m = \gamma \cdot m_o = 2,294 \cdot 1'675 \cdot 10^{-27} = 3'84 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$P_{\text{relativista}} = m \cdot v = 3'84 \cdot 10^{-27} \cdot 0'9 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1'04 \cdot 10^{-18} \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$$

7. Un haz de protones se acelera hasta alcanzar una energía de 900 MeV. Calcular la velocidad de dichas partículas (nota: la energía dada corresponde con la energía cinética).

$$(m_p)_0 = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$900 \text{ MeV} = 900 \text{ MeV} \cdot \frac{10^6 \text{ eV}}{1 \text{ MeV}} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}; E_c = E_{\text{total}} - E_0 \Rightarrow E_c = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2$$

$$1,44 \cdot 10^{-10} = (m - 1,673 \cdot 10^{-27}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \Rightarrow m = \frac{1,44 \cdot 10^{-10}}{(3 \cdot 10^8)^2} + 1,673 \cdot 10^{-27} = 3,273 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m = \gamma \cdot m_0 \Rightarrow \gamma = \frac{m}{m_0} = \frac{3,273 \cdot 10^{-27}}{1,673 \cdot 10^{-27}} = 1,956$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1,956^2}} = 0,8594 \Rightarrow v = 0,8594 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,578 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. Un mesón π^0 tiene una energía en reposo de 135 MeV y se mueve con una velocidad de 0,85 c. Determina:

- Su energía total.
- Su energía cinética.
- Su momento lineal.

$$\text{a) } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,85 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,85^2}} = 1,898$$

$$E_{\text{total}} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \gamma \cdot E_0 = 1,898 \cdot 135 = 256,27 \text{ MeV}$$

$$\text{b) } E_c = E_{\text{total}} - E_0 = 256,27 - 135 = 121,27 \text{ MeV}$$

$$\text{c) } p = \gamma \cdot m_0 \cdot v = \gamma \cdot m_0 \cdot 0,85 \cdot c = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot 0,85 \cdot c^2}{c} = \frac{\gamma \cdot 0,85 \cdot E_0}{c} = \frac{1,898 \cdot 0,85 \cdot 135}{c} = 217,80 \frac{\text{MeV}}{c}$$

9. Quizás en un futuro podamos hablar de “una nave fabricada en la Tierra, de 50 m de longitud, de la que los habitantes de una colonia del planeta Marte dijeron que medía 49,9 m cuando pasó por delante de ellos”. Suponiendo que el movimiento relativo de la nave respecto de los habitantes de la colonia era de traslación uniforme en la dirección y sentido del movimiento de éstos, ¿a qué velocidad viajaba la nave respecto de los habitantes de la colonia?

$$d = \gamma \cdot d' \Rightarrow d' = \frac{d}{\gamma} \Rightarrow d' = \frac{d}{1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow d' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot d$$

$$49,9 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 50 \Rightarrow \left(\frac{49,9}{50}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{49,9}{50}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0,996 = 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow v^2 = 4 \cdot 10^{-3} \cdot c^2 \Rightarrow v = \sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 1,89 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

10. ¿A qué velocidad debe moverse una partícula relativista para que su energía total sea un 10% mayor que su energía en reposo? Expresa el resultado en función de la velocidad de la luz en el vacío.

$$E_{\text{total}} = E_0 + \frac{10}{100} \cdot E_0 = E_0 + 0.1 \cdot E_0 = 1.1 \cdot E_0$$

$$E_{\text{total}} = 1.1 \cdot E_0 \Rightarrow m \cdot c^2 = 1.1 \cdot E_0 \Rightarrow m \cdot c^2 = 1.1 \cdot m_0 \cdot c^2 \Rightarrow m = 1.1 \cdot m_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1.1 \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1.1} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 0.909^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.909^2 = 0.174 \Rightarrow v = \sqrt{0.174 \cdot c^2} = 0.42 \cdot c$$

11. Un móvil A se desplaza con una velocidad de 0,9 c en la dirección positiva del eje X con respecto a un observador O. Otro móvil B se desplaza con una velocidad de 0,8 c con respecto a A, también en la dirección positiva del eje X. ¿Cuál es la velocidad de B con respecto a O?

Transformación de Lorentz de la velocidad:
$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot v_x}$$

Móvil "A" con velocidad 0,9 c respecto a "O": $v = 0.9 \cdot c$

Móvil "B" con velocidad 0,8 c respecto a "A": $v_x' = 0.8 \cdot c$

Velocidad del móvil "B" respecto a "O": $v_x = ?$

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot v_x} \Rightarrow 0.8 \cdot c = \frac{v_x - 0.9 \cdot c}{1 - \frac{0.9 \cdot c}{c^2} \cdot v_x} \Rightarrow 0.8 \cdot c - \frac{0.8 \cdot c \cdot 0.9 \cdot c}{c^2} \cdot v_x = v_x - 0.9 \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot c - 0.8 \cdot 0.9 \cdot v_x = v_x - 0.9 \cdot c \Rightarrow 0.8 \cdot c - 0.72 \cdot v_x = v_x - 0.9 \cdot c \Rightarrow 17 \cdot c = 172 \cdot v_x \Rightarrow v_x = \frac{17 \cdot c}{172} = 0.988 \cdot c$$

12. Una nave espacial avanza en la dirección negativa del eje X con una velocidad de 0,9 c con respecto a la Tierra, mientras otra lo hace en la dirección positiva el eje X con la misma velocidad en relación con nuestro planeta. Determina:

a) La velocidad de una nave con respecto a la otra.

b) Esa velocidad, pero aplicando las transformaciones galileanas.

a) Nave espacial "A" con velocidad -0,9 c respecto a la Tierra: $v_x = -0.9 \cdot c$

Nave espacial "B" con velocidad 0,9 c respecto a la Tierra: $v = 0.9 \cdot c$

Velocidad de una nave (A) respecto a la otra (B): $v_x' = ?$

(O' es la nave espacial B)

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot v_x} = \frac{-0.9 \cdot c - 0.9 \cdot c}{1 - \frac{0.9 \cdot c}{c^2} \cdot (-0.9 \cdot c)} = \frac{-2 \cdot 0.9 \cdot c}{1 + \frac{0.9^2 \cdot c^2}{c^2}} = \frac{-1.8 \cdot c}{1.81} = -0.994 \cdot c$$

b) $v_x' = v_x - v = -0.9 \cdot c - 0.9 \cdot c = -1.8 \cdot c$