TEMA 7: CINEMÁTICA CON NOTACIÓN VECTORIAL

$\vec{b} = \boldsymbol{b}$ Vector "b"	Cuando se escribe a ordenador se admite sustituir la flecha que indica el carácter vectorial por escribir la letra que representa al vector en negrita.	$\vec{b}$, como cualquier vector, tiene las siguientes características: módulo, dirección y sentido. Ejemplo: $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ -Modulo $b = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$ -Dirección: La línea formada al unir los puntos (0,0,0) y (2,3,-1) -Sentido: Sobre la línea que indica la dirección el sentido es desde el punto (0,0,0) hacia el (2,3,-1)
$\vec{r}$ Vector de posición de un punto material	Si el punto material está en movimiento, $\vec{r}$ dependerá del tiempo	Ejemplo: $\vec{r} = 3\vec{i} - 2t^2\vec{j} + 6t\vec{k} \quad (m)$ Donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son, respectivamente, los vectores unitarios de los ejes X,Y,Z y (m) representa al metro, unidad de longitud en el S.I. Si quisieras calcular el vector de posición, por ejemplo, en el instante t=1 s: $\vec{r}_{t=1s} = 3\vec{i} - 2\cdot 1^2\vec{j} + 6\cdot 1\,\vec{k} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\,\vec{k}\,(m)$
$\lvert\vec{r}\rvert = r$ Módulo del vector de posición	El módulo del vector de posición es la longitud de dicho vector.	Si queremos calcular el módulo del vector $\vec{r}_{t=1s} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\,\vec{k}\,(m)$ Se haría la raíz cuadrada de la suma de sus componentes al cuadrado: $r_{t=1s} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7\ m$
$\Delta\vec{r}$ Vector desplaza-miento	$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}$	Cuando el punto material ha cambiado de posición, el vector desplazamiento se calcula restando el vector de posición final al vector de posición inicial. Si consideramos: $\vec{r}_{inicial} = 3\vec{i}\ (m)$ $\vec{r}_{final} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\,\vec{k}\,(m)$ Entonces: $\Delta\vec{r} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\,\vec{k}) - (3\vec{i}) = -2\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m)$
$\lvert\Delta\vec{r}\rvert = \Delta r$ Módulo del vector desplaza-miento	El módulo del vector desplazamiento es la longitud de dicho vector.	Si queremos calcular el módulo del vector desplazamiento: $\Delta\vec{r} = -2\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m)$ Entonces: $\Delta r = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 6{,}32\ m$
$\vec{v}_m$ Velocidad media	$\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	Si suponemos $\Delta\vec{r} = -2\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m)$ y $\Delta t = 1s$, entonces: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{-2\vec{j} + 6\,\vec{k}}{1} = -2\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m\cdot s^{-1})$
$\lvert\vec{v}_m\rvert = v_m$ Módulo de la velocidad media	El módulo del vector velocidad media es la longitud de dicho vector.	Si queremos calcular el módulo de la velocidad media $\vec{v}_m = -2\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m\cdot s^{-1})$ entonces: $v_m = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 6{,}32\ \ m\cdot s^{-1}$
$\vec{a}_m$ Aceleración media	$\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	Si suponemos las siguientes velocidades $\vec{v}_{final} = -4\vec{j} + 6\vec{k}\ \ (m\cdot s^{-1})$ $\vec{v}_{inicial} = 6\vec{k}\ \ (m\cdot s^{-1})$ y que el tiempo trascurrido entre ellas es de 1 segundo, para calcular la aceleración media escribiríamos:

		$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{final} - \vec{v}_{inicial}}{\Delta t} = \frac{(-4\vec{j} + 6\vec{k}) - (6\vec{k})}{1} = -4\vec{j}\ (m \cdot s^{-2})$
$\lvert\vec{a}_m\rvert = a_m$ Módulo de aceleración media	El módulo del vector aceleración media es la longitud de dicho vector.	Para calcular el módulo de la aceleración media $\vec{a}_m = -4\vec{j}\ (m \cdot s^{-2})$ Escribiríamos: $a_m = \sqrt{(-4)^2} = 4\ (m \cdot s^{-2})$
$\vec{v}$ Velocidad	$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	La velocidad instantánea se calcula con el límite del cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo transcurrido cuando el tiempo tiende a cero. Esto se denomina derivada del vector de posición respecto al tiempo. Si el vector de posición tiene la siguiente expresión $\vec{r} = 3\vec{i} - 2t^2\vec{j} + 6t\vec{k}\quad (m)$ y queremos calcular la velocidad, entonces realizamos la derivada correspondiente: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(3\vec{i} - 2t^2\vec{j} + 6t\vec{k})}{dt} =$ $= -2 \cdot 2t\,\vec{j} + 6\vec{k} = -4t\,\vec{j} + 6\vec{k}\ (m \cdot s^{-1})$
$\lvert\vec{v}\rvert = v$ Módulo de la velocidad o rapidez	El módulo del vector velocidad es la longitud de dicho vector.	Si queremos calcular el módulo de la velocidad $\vec{v} = -4\vec{j} + 6\,\vec{k}\ \ (m \cdot s^{-1})$ entonces escribiríamos: $v = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 7{,}21\ m \cdot s^{-1}$
$\vec{a}$ Aceleración	$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	La aceleración instantánea se calcula con el límite del cociente entre el incremento de velocidad y el tiempo transcurrido cuando el tiempo tiende a cero. Esto se denomina derivada de la velocidad respecto al tiempo. Si la expresión de la velocidad de un móvil es $\vec{v} = -4t\,\vec{j} + 6\vec{k}\ (m \cdot s^{-1})$ entonces la aceleración se calcula: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(-4t\,\vec{j} + 6\vec{k})}{dt} = -4\,\vec{j}\ \ (m \cdot s^{-2})$
$\lvert\vec{a}\rvert = a$ Módulo de la aceleración	El módulo del vector aceleración es la longitud de dicho vector.	Para calcular el módulo de la aceleración $\vec{a} = -4\vec{j}\ (m \cdot s^{-2})$ Escribiríamos: $a = \sqrt{(-4)^2} = 4\ (m \cdot s^{-2})$
$\lvert\vec{a}_t\rvert = a_t$ Módulo de la aceleración tangencial	$a_t = \frac{dv}{dt}$ La ac. tangencial mide el cambio en la rapidez.	Si la rapidez de un móvil es $v = 3t - 5\ (m \cdot s^{-1})$ Entonces el módulo de la aceleración tangencial se calcula: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(3t - 5)}{dt} = 3\ (m \cdot s^{-2})$
$\lvert\vec{a}_c\rvert = a_c = \lvert\vec{a}_n\rvert = a_n$ Módulo de aceleración centrípeta o normal.	$a_c = \frac{v^2}{R}$ La aceleración centrípeta o normal mide el cambio en la dirección de la velocidad.	Si suponemos que un móvil recorre con rapidez constante $v = 20(m \cdot s^{-1})$ una trayectoria circular de radio $R = 100\ m$, entonces el módulo de su aceleración centrípeta o normal sería: $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{100} = 4\ (m \cdot s^{-2})$
$\lvert\vec{a}\rvert = a$ Módulo de aceleración	Módulo de la aceleración a partir de sus componentes intrínsecas	$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_c^{\,2}}\quad (m \cdot s^{-2})$

Ejercicio para practicar la cinemática vectorial:

El vector de posición de un móvil es $\vec{r} = 10t^2\ \vec{i} + 6t^3\ \vec{j} - 2\ \vec{k}\ \ (m)$. Calcula:

a) Los vectores de posición en el instante t=0 s y en el instante t=2 s
b) El vector desplazamiento entre t=0 s y t=2 s
c) El módulo del vector desplazamiento entre t=0 s y t=2 s
d) La velocidad media en el mismo intervalo de tiempo anterior.
e) El módulo de la velocidad media entre t=0 s y t=2 s
f) La velocidad del móvil
g) La velocidad del móvil en el instante t=0 s y en el instante t=2 s
h) La aceleración media entre t=0 s y t=2 s
i) El módulo de la aceleración media del apartado anterior.
j) La aceleración del móvil
k) La aceleración del móvil en el instante t=2 s
l) El módulo de la aceleración del móvil en el instante t=2 s

Solución:

a) $\vec{r}_{t=0s} = -2\ \vec{k}\ \ (m)$; $\vec{r}_{t=2s} = 40\ \vec{i} + 48\ \vec{j} - 2\ \vec{k}\ \ (m)$
b) $\Delta\vec{r} = 40\ \vec{i} + 48\ \vec{j}\ \ (m)$
c) $\Delta r = 62,48\ \ (m)$
d) $\vec{v}_m = 20\ \vec{i} + 24\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-1})$
e) $v_m = 31,24\ (m \cdot s^{-1})$
f) $\vec{v} = 20t\ \vec{i} + 18t^2\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-1})$
g) $\vec{v}_{t=0s} = 0\ \ (m \cdot s^{-1})$ ¸ $\vec{v}_{t=2s} = 40\ \vec{i} + 72\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-1})$
h) $\vec{a}_m = 20\ \vec{i} + 36\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-2})$
i) $a_m = 41,18\ \ (m \cdot s^{-2})$
j) $\vec{a} = 20\ \vec{i} + 36t\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-2})$
k) $\vec{a}_{t=2s} = 20\ \vec{i} + 72\ \vec{j}\ \ (m \cdot s^{-2})$
l) $a = 74,73\ \ (m \cdot s^{-2})$