TEMA 0: INTRODUCCIÓN

0.1 CÁLCULO VECTORIAL

0.1.1 MAGNITUDES ESCALARES Y MAGNITUDES VECTORIALES

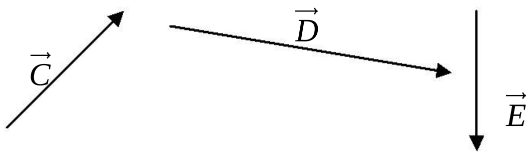
- Magnitudes escalares: son aquellas que se especifican conociendo un valor numérico y su unidad.
- Magnitudes vectoriales: son aquellas que se especifican mediante un valor numérico y su unidad (módulo), dirección y sentido.
- Vectores: Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores. Un vector es un segmento orientado cuya longitud es proporcional al módulo de la magnitud vectorial, la recta sobre la que se encuentran es la dirección y la punta de flecha indica el sentido. Llamaremos punto de aplicación al origen del vector.
- Dado un vector $\vec{v}$ o **v** , representaremos su módulo por $|\vec{v}|$ o bien por v .

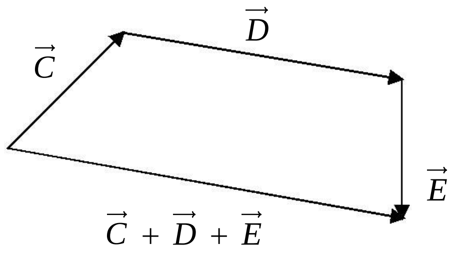
0.1.2 NOCIONES DE CÁLCULO VECTORIAL

- Suma de vectores. Diferencia de vectores.

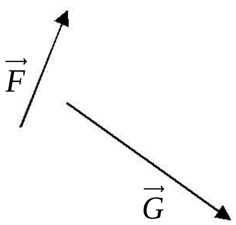
Para sumar dos vectores se disponen uno a continuación del otro y se unen el punto de aplicación del primero con el extremo del otro.

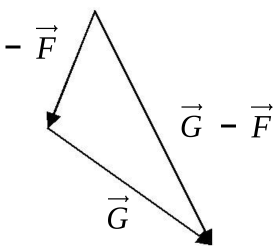
También puede calcularse la suma de vectores mediante la regla del paralelogramo: se unen los vectores por sus puntos de aplicación, se traza una paralela al otro vector por el extremo de cada uno de ellos de modo que queda trazado un paralelogramo. La diagonal del mismo será el vector suma, siendo el punto de aplicación el de los dos vectores sumados. Si se suman más de dos vectores se sitúan todos uno tras otro y se une el punto de aplicación del primero con el extremo del último, o bien se suman dos y el resultado con el siguiente y así sucesivamente.





La diferencia de dos vectores corresponde a la suma de un vector con el opuesto del otro. Se puede obtener uniendo los extremos de los dos vectores unidos previamente por sus puntos de aplicación.





0.1.3 Descomposición de un vector.

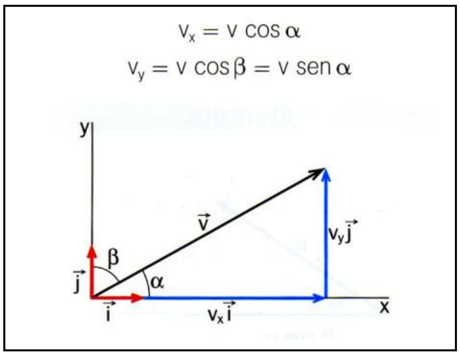
El proceso contrario a la suma de dos vectores para obtener otro vector es la descomposición de un vector para obtener dos que sumados dan dicho vector. Un vector puede descomponerse de muchas maneras, pero es especialmente interesante la descomposición en dos vectores perpendiculares entre sí

Se dibujan dos rectas perpendiculares entre sí que pasen por el punto de aplicación de a después se realiza la proyección de $\vec{v}$ sobre ambas rectas, obteniendo los vectores $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$.

Si representamos un vector en el plano, las coordenadas cartesianas vienen dadas por;
$v_x = v \cos \alpha$
$v_y = v \cos \beta = v \operatorname{sen} \alpha$

Los vectores v_x y v_y son las componentes de v respecto al sistema de ejes X-Y.

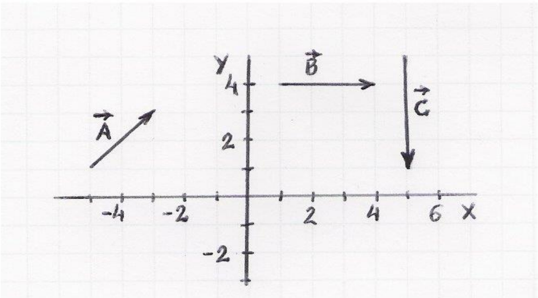
$\cos \alpha$ es el coseno director de v respecto al eje X
$\cos \beta$ es el coseno director de v respecto al eje Y



0.1.4 Producto de un vector por un escalar.

Se define el producto de un vector, v, por un escalar, n, como otro vector cuyo módulo es el producto del módulo de v por el escalar n, o sea, n·v, siendo su dirección la misma que la de v y, si n>0, el sentido es el de v, mientras que si n<0, el sentido es el contrario al de v.

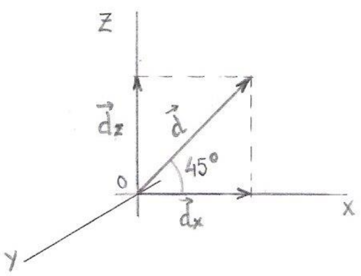
A.1.- Dados los vectores de la figura, realiza las operaciones siguientes:

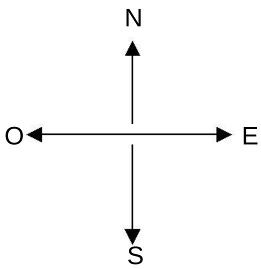


a) **A** + **B**
b) **A** + **B** + **C**
c) **B** – **C**
d) 4·**B**
e) Descomponer **A** en dos vectores perpendiculares entre sí.

0.1.5 Componentes de un vector.

Para expresar un vector bastará con dar su módulo, dirección y sentido. Ejemplo, un desplazamiento de 500 m, dirección 45º sobre el eje X, sentido N-E.

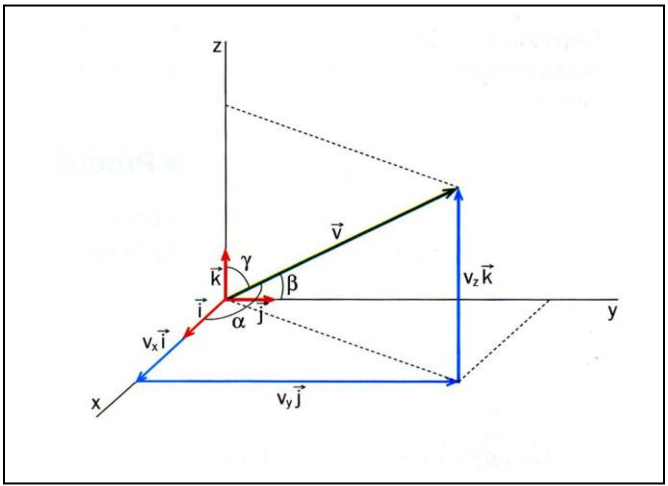




Otra forma es dar las componentes del vector, que son sus proyecciones sobre los ejes coordenados. Obsérvese que

$\mathbf{d} = \mathbf{d_x} + \mathbf{d_y} + \mathbf{d_z}$ (teniendo en cuenta que $\mathbf{d_z} = 0$).

Sobre cada uno de los ejes consideraremos un vector unitario (vector de módulo 1). Sobre el eje X consideraremos el vector unitario i, sobre el eje Y el vector unitario j y sobre el eje Z el vector unitario k.



Así dado un vector **v**: $\mathbf{v} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v_y} + \mathbf{v_z}$

Donde $v_x = v \cdot \cos \alpha$

$v_y = v \cdot \cos \beta$

$v_z = v \cdot \cos \gamma$

Como: $\mathbf{v_x} = v_x \cdot \mathbf{i}$; $\mathbf{v_y} = v_y \cdot \mathbf{j}$; $\mathbf{v_z} = v_z \cdot \mathbf{k}$

Resulta: $\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k}$

Puede demostrarse que para cualquier vector $\vec{a}$, también expresado como **a**, su módulo a puede ser calculado así:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Teniendo en cuenta que los vectores pueden expresarse mediante sus componentes podemos establecer que la suma de dos o más vectores es la suma de sus componentes, o sea, que el vector suma tiene como componente x la suma de las componentes x , tiene como componente y la suma de las componentes y y tiene como componente z la suma de las componentes z.

Ejemplo: Dados los vectores $\mathbf{A} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}) + (b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}) = (a_x + b_x) \cdot \mathbf{i} + (a_y + b_y) \cdot \mathbf{j} + (a_z + b_z) \cdot \mathbf{k}$

$n \cdot \mathbf{A} = n \cdot (a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}) = n \cdot a_x \cdot \mathbf{i} + n \cdot a_y \cdot \mathbf{j} + n \cdot a_z \cdot \mathbf{k}$

A.2.- Dados los vectores: $\mathbf{A} = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 4 \cdot \mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = -4 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$; calcula

a) Módulo de cada vector.
b) Vector suma de los tres.
c) Dibuja los tres vectores y calcula su suma gráficamente.
d) Obtén los vectores $2 \cdot \mathbf{A}$ y $-3 \cdot \mathbf{B}$

0.1.6 Producto escalar de dos vectores.

Dados dos vectores: **A** = a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·**k** y **B** = b_x·**i** + b_y·**j** + b_z·**k**, se define su producto escalar; **A·B**; como un escalar cuyo valor se determina así:

A·B = A·B·cos θ, siendo θ el ángulo que forman los vectores **A** y **B**.

Consecuencias:

- Si **A** y **B** son de la misma dirección y sentido, θ = 0º, cos θ = 1, **A·B** = A·B(valor máximo)
- Si **A** y **B** son de la misma dirección y sentido contrario, θ = 180º, cos θ = -1, **A·B** = -**A·B**
- Si **A** y **B** son de direcciones perpendiculares, θ = 90º, cos θ = 0, **A·B** = 0.

A.3.- Producto escalar de los vectores unitarios: determina...

i · j =	**i · k** =
k · j =	**i · i** =
j · j =	**k · k** =

Dados dos vectores: : **A** = a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·**k** y **B** = b_x·**i** + b_y·**j** + b_z·**k** , también puede definirse su producto escalar; **A·B**; como un escalar cuyo valor se determina así:

A·B = (a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·**k**) · (**b_x**·**i** + b_y·**j** + b_z·**k**) = $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

A.4.- Dados los vectores: **A** = -3·**i** + 4·**j**; **B** = -2 **i** + 3·**k**; **C** = 2·**i** + 3·**j** – 4·**k**

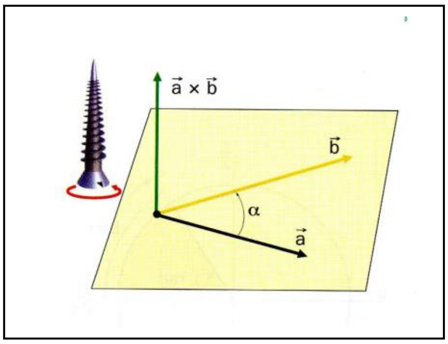
a) Determina **A·B** y **B·C**
b) Determina ángulo que forman entre sí los vectores **A** y **B**.

0.1.7 Producto vectorial de dos vectores.

Dados dos vectores: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ y $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, se define su producto vectorial; $\vec{a} \times \vec{b}$; como un vector con las siguientes características:

Módulo $\vec{a} \times \vec{b}$ = a·b·sen θ, siendo θ el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Dirección perpendicular al plano que definen $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sentido el de avance de un tornillo que girase de $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$ por el camino más corto.



Consecuencias:

- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son de la misma dirección y sentido, θ = 0º, sen θ = 0, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son de la misma dirección y sentido contrario, θ = 180º, sen θ = 0, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son de direcciones perpendiculares, θ = 90º, cos θ = 1, $\vec{a} \times \vec{b} = A \cdot B$ (valor máximo).

A.5.- Producto vectorial de los vectores unitarios: determina...

i x **j** =	**i** x **k** =
k x **j** =	**i** x **i** =
j x **j** =	**k** x **k** =

Dados dos vectores: $\mathbf{A} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}$, también puede definirse su producto vectorial; **A**x**B**; como un vector que se determina así:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y \cdot b_z \cdot \mathbf{i} + a_z \cdot b_x \cdot \mathbf{j} + a_x \cdot b_y \cdot \mathbf{k} - b_x \cdot a_y \cdot \mathbf{k} - b_y \cdot a_z \cdot \mathbf{i} - b_z \cdot a_x \cdot \mathbf{j} =$$

$$= (a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z) \cdot \mathbf{i} + (a_z \cdot b_x - b_z \cdot a_x) \cdot \mathbf{j} + (a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y) \cdot \mathbf{k}$$

A.6.- Dados los vectores: $\mathbf{A} = 2 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = -3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} - 4 \cdot \mathbf{k}$ calcula:

a) **A**x**B**
b) **B**x**C**
c) Determina el ángulo que forman entre sí los vectores **A** y **B**.

0.2 DERIVADAS E INTEGRALES

0.2.1 DERIVADAS

- Derivada de una función potencial:

Dada la función $f(x) = k\cdot x^n$ se obtiene su derivada f´(x), de la siguiente forma:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = n\cdot k\cdot x(n-1)$$

Ejemplo: dada $f(x) = -5\cdot x^3$; $f'(x) = 3\cdot(-5)\cdot x^2 = -15\cdot x^2$

- Derivada de funciones trigonométricas:

Función coseno: f(x) = cos x; su derivada es: f´(x) = -sen x

f(x) = cos (k·x); su derivada es: f´(x) = -k·sen (k·x)

f(x) = cos (k·x+ a); su derivada es: f´(x) = -k·sen (k·x+a)

Función seno: f(x) = sen x su derivada es: f´(x) = cos x

f(x) = sen (k·x) su derivada es: f´(x) = k·cos (k·x)

f(x) = sen (k·x+ a) su derivada es: f´(x) = k·cos (k·x+a)

- Derivada de una constante: la derivada de una constante es cero. Ejemplo: $\frac{da}{dt} = 0$
- Derivada de una suma: la derivada de una suma corresponde a la suma de las derivadas.

Ejemplo: dada $f(x) = 3 + 2\cdot x^2 - 5\cdot x^3$; $f'(x) = 0 + 2\cdot 2\cdot x + 3\cdot(-5)\cdot x^2 = 4\cdot x - 15\cdot x^2$

A.7.- Obtén las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3\cdot x^4 + 2\cdot x^2 - 4$

b) $f(x) = \frac{3}{x^3} - 2\cdot x^3$

c) f(x) = 5·sen(4·x+3)

d) f(x) = 7·cos(4·x+3)

0.2.2 INTEGRALES

La integración es el proceso contrario a la derivación. Dada una función f(x), su integración corresponderá a la búsqueda de una función primitiva, F(x), cuya derivada corresponda a f(x).

En física se aplica la integración para solucionar el cálculo de magnitudes definidas en un intervalo, a partir de la suma de infinitos términos infinitesimales (que tienden a cero pero que no son nulos) en los que dicho intervalo ha sido dividido. Los puntos A y B son los extremos de dicho intervalo.

Para resolver integrales definidas se utiliza la regla de Barrow.

$$\int_A^B f(x)\cdot dx = F(x)]^B_A = F(B) - F(A)$$

Ejemplos:

- La integral de una función potencial $f(x) = k\cdot x^n$, corresponde a $k\cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Dada f(x) = x, la integración entre A= 1 y B = 3, corresponde a:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$$

Dada $f(x) = 2\cdot x^3$, la integración entre A= 2 y B = 5, corresponde a:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_2^5 2x^3\,dx = \left[2\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \left[\frac{x^4}{2}\right]_2^5 = \frac{5^4}{2} - \frac{2^4}{2} = 304{,}5$$

- La integral de la función f(x) = sen x, corresponde a – cos x
- La integral de la función f(x) = cos x, corresponde a sen x
- La integral de una función constante, f(x) = k, corresponde a k·x
- La integral de una suma corresponde a la suma de las integrales

Dada $f(x) = 4 + 3\cdot x - 2\cdot x^2$, la integración entre A= 1 y B = 2, corresponde a:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4 + 3\cdot x - 2\cdot x^2\right) dx = \left[4\cdot x + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[4\cdot 2 + 3\cdot\frac{2^2}{2} - 2\frac{2^3}{3}\right] - \left[4\cdot 1 + 3\cdot\frac{1^2}{2} - 2\frac{1^3}{3}\right]$$

A.8.- Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^2 \left(-3 + 5\cdot x^4 - 3\cdot x^2\right) dx =$

b) $\int_2^3 \left(\frac{9\cdot x^2}{3} - 4\cdot x - 2\right)\cdot dx =$

c) $\int_2^3 \left(\frac{2}{x^2} - 4\right)\cdot dx =$

d) $\int_2^3 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{x^4}\right)\cdot dx =$

0.3 REPASO DE CINEMÁTICA, DINÁMICA Y ENERGÍA

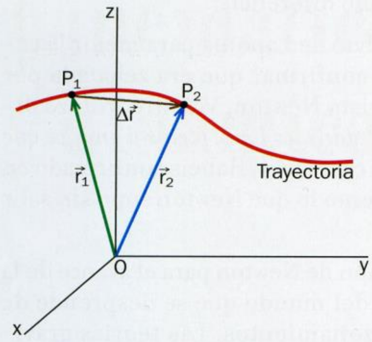
0.3.1 CINEMÁTICA

.

El concepto de movimiento de un punto o de un cuerpo viene ligado al concepto de **cambio de posición** con respecto a otro que se considere fijo, denominado **sistema de referencia**.

> Un **sistema de referencia** es un punto, respecto al que se determina la posición de un cuerpo que se mueve.

Una vez fijado el sistema de referencia, para describir el movimiento hay que definir las magnitudes características: vector de posición, vector desplazamiento, trayectoria, velocidad y aceleración.



Vector de posición, vector desplazamiento y trayectoria

Para situar el móvil en el sistema de referencia se utiliza el **vector de posición** que tiene su raíz en el origen del sistema de referencia y su extremo en el móvil.

Se representa como $\vec{r}$ y generalmente varía con el tiempo. El vector de posición de un móvil que se encuentra en el punto P_1 del espacio es:

$$\vec{r}_1(t) = x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j} + z_1(t)\vec{k}$$

Transcurrido un intervalo de tiempo Δt, el móvil se sitúa en P_2, cuyo vector de posición es: $\vec{r}_2(t)$. El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$ entre los puntos P_1 y P_2 es un vector que parte de P_1 y llega a P_2, es decir, es el vector diferencia entre la posición final y la posición inicial:

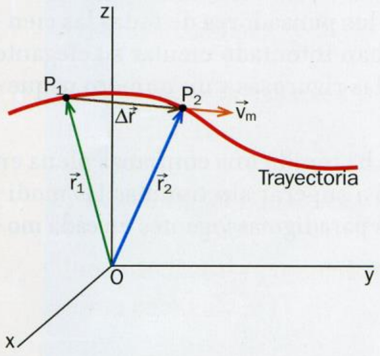
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

La **trayectoria** es la línea que constituye el lugar geométrico de los puntos ocupados sucesivamente por el móvil.

.

VELOCIDAD MEDIA



Velocidad

La **velocidad** es la magnitud que nos da información sobre el cambio de posición que experimenta un móvil y el tiempo que emplea en producirse dicho cambio. La unidad de la velocidad en el SI es el $m\,s^{-1}$.

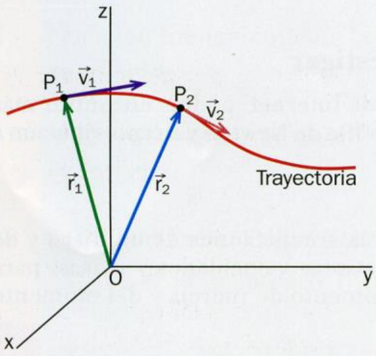
- **Vector velocidad media.** Es el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo empleado por el móvil en variar su posición.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento, y sus componentes cartesianas son:

$$v_{mx} = \frac{(x_2 - x_1)}{\Delta t};\quad v_{my} = \frac{(y_2 - y_1)}{\Delta t};\quad v_{mz} = \frac{(z_2 - z_1)}{\Delta t}$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA



- **Vector velocidad instantánea.** Cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero, el punto P_2 se aproxima al punto P_1, y la longitud de la trayectoria y el módulo del vector desplazamiento coinciden. Se define velocidad instantánea, o simplemente velocidad, como el límite al que tiende el cociente $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Esta expresión es la derivada del vector de posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

donde $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$, son las componentes cartesianas v_x, v_y y v_z del vector $\vec{v}$.

La **dirección** del vector $\vec{v}$ es la tangente a la trayectoria en el punto donde se encuentra el móvil en ese instante y el **módulo** se denomina **celeridad** o **rapidez**:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Aceleración

La **aceleración** es la magnitud que da información sobre el cambio de velocidad del móvil y el tiempo empleado en ello. El vector velocidad puede variar, de módulo y/o dirección de unos puntos a otros de la trayectoria. Su unidad en el SI es $m\,s^{-2}$

- **Vector aceleración media.** Es el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea $\Delta\vec{v}$ y el intervalo de tiempo transcurrido Δt.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x\vec{i} + \Delta v_y\vec{j} + \Delta v_z\vec{k}}{\Delta t}$$

El vector aceleración media tiene la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{v}$ y sus componentes cartesianas son:

$$a_{mx} = \frac{(v_{x_2} - v_{x_1})}{\Delta t}; \quad a_{my} = \frac{(v_{y_2} - v_{y_1})}{\Delta t}; \quad a_{mz} = \frac{(v_{z_2} - v_{z_1})}{\Delta t}$$

- **Vector aceleración instantánea.** Cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a cero se define el vector aceleración instantánea, o simplemente aceleración, como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

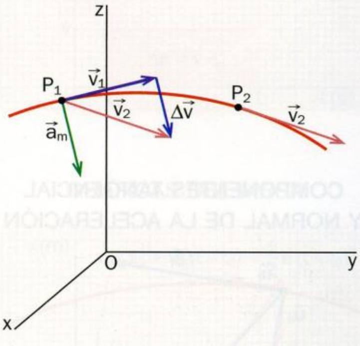
Por tanto, la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

donde $\frac{dv_x}{dt}$; $\frac{dv_y}{dt}$ y $\frac{dv_z}{dt}$, son las componentes cartesianas a_x, a_y y a_z del vector $\vec{a}$ y el módulo de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Los **movimientos curvilíneos** son siempre movimientos acelerados porque el vector velocidad cambia de dirección.



A.9.- La posición de una gota de agua que asciende en un torbellino de aire viene dada, con respecto a un sistema de referencia colocado en el suelo y cuyo eje vertical es el eje del ciclón, por $\vec{r} = 30\cos 2t\,\vec{i} + 30\,sen\,2t\,\vec{j} + 40\,t\,\vec{k}\ (m)$. Calcula:

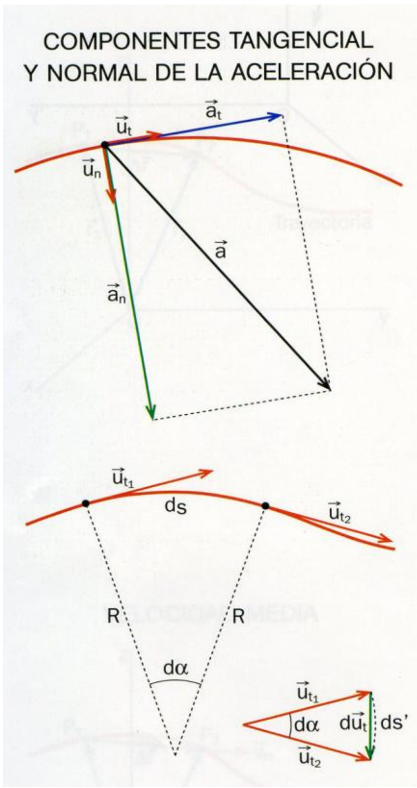
a) La velocidad media en el intervalo entre 0,3 y 0,4 s.
b) La velocidad instantánea para cualquier tiempo.
c) Las componentes de la velocidad para t=0,8 s.
d) La aceleración instantánea.

COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

En muchas ocasiones es interesante obtener una descomposición ortogonal de la aceleración según un sistema de referencia en el móvil y que se mueve con él. Uno de los ejes tiene siempre la dirección de la tangente a la trayectoria y la proyección de la aceleración sobre él se llama **aceleración tangencial**, mientras que el otro es perpendicular y se denomina **aceleración normal**.

El vector velocidad puede escribirse como $\vec{v} = v\vec{u}_t$, donde $\vec{u}_t$ es el vector unitario de la velocidad, tangente a la trayectoria. Definida la aceleración como $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, se sustituye la expresión de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$



- El primer término corresponde con la **componente tangencial** de la aceleración y da información del cambio en el módulo de la velocidad:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t$$

- El segundo término es la **componente normal** de la aceleración e informa del cambio en la dirección de la velocidad:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

La aceleración normal puede expresarse como:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = v\frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{u}_t}{ds}v = v^2\frac{d\vec{u}_t}{ds}$$

El elemento de trayectoria *ds* puede aproximarse a un arco de circunferencia: $ds = R d\alpha$

Como se puede ver en la figura, $d\alpha$ es un ángulo pequeño, por lo que $d\vec{u}_t$ se puede aproximar al arco:

$$|d\vec{u}_t| \approx ds' = |\vec{u}_t| d\alpha = 1 \cdot d\alpha = d\alpha \Rightarrow \frac{|d\vec{u}_t|}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

El vector $\frac{d\vec{u}_t}{ds}$ tiene de módulo $\frac{1}{R}$, y su dirección es la del vector unitario $\vec{u}_n$ perpendicular a $\vec{u}_t$. Por tanto, la aceleración normal queda:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

donde *R* es el radio de curvatura de la trayectoria y que se corresponde con el radio de la circunferencia tangente a la trayectoria en el punto considerado.

La aceleración de cualquier movimiento se puede descomponer en dos vectores ortogonales que representan la variación en el módulo del vector velocidad (**aceleración tangencial**) y la variación en la dirección del vector velocidad (**aceleración normal**):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS		
Movimiento	**Aceleración tangencial**	**Aceleración normal**
Movimiento rectilíneo uniforme	$a_t = 0$	$a_n = 0$
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	$a_t = cte$	$a_n = 0$
Movimiento rectilíneo variado	$a_t \neq 0$	$a_n = 0$
Movimiento curvilíneo uniforme	$a_t = 0$	$a_n \neq 0$
Movimiento curvilíneo uniformemente acelerado	$a_t = cte$	$a_n \neq 0$
Movimiento curvilíneo variado	$a_t \neq 0$	$a_n \neq 0$

Estudio de algunos movimientos

- **Movimiento rectilíneo uniforme (*mru*).** Un móvil sigue un movimiento rectilíneo uniforme cuando sigue una trayectoria rectilínea a velocidad constante. Como no hay cambio en la velocidad, la aceleración es nula.

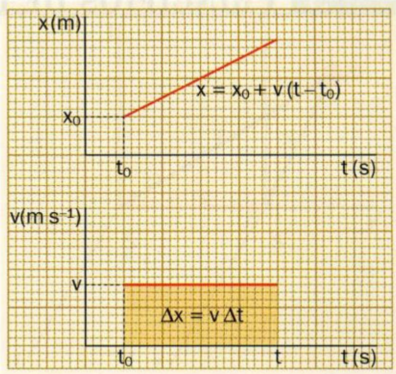
Para obtener la ecuación del movimiento, se parte de la expresión de la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}(t - t_0)$$

La ecuación del movimiento rectilíneo uniforme es:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

GRÁFICAS DEL *MRU*



- **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (*mrua*).** Un móvil sigue un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado cuando se desplaza por una trayectoria rectilínea con una aceleración constante.

Para obtener la ecuación de la velocidad para cualquier instante de tiempo, se parte de la expresión de la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

Para obtener la ecuación del movimiento hay que tener en cuenta que:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

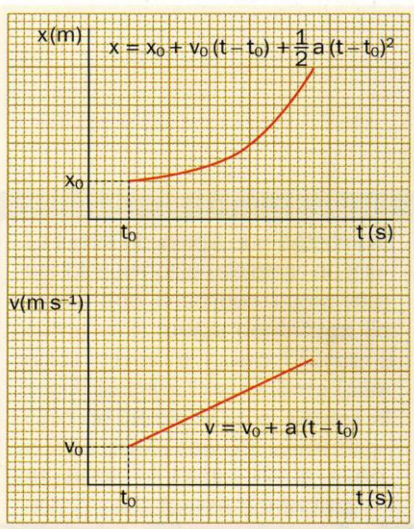
y sustituyendo la expresión de la velocidad:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

La ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

GRÁFICAS DEL *MRUA*



- **Movimiento circular uniforme (*mcu*).** Un móvil sigue un movimiento circular uniforme, cuando describe una trayectoria circular de radio *R* con una velocidad angular ω constante.

Para una partícula que se mueve en sentido positivo con una velocidad angular ω, si se considera el origen del sistema de referencia el centro de la circunferencia, el vector de posición es $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, donde $x = R\cos\omega t$; $y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$:

$$\vec{r} = R\cos\omega t\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\vec{j}$$

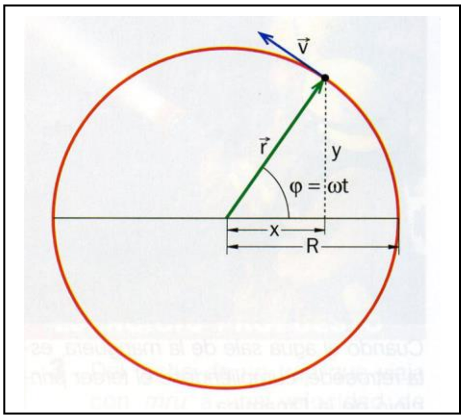
La velocidad lineal de la partícula es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega(-\mathrm{sen}\,\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j})$$

Su aceleración lineal es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\vec{i} - R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\vec{j} = -\omega^2\vec{r}$$

El vector aceleración tiene la dirección del vector de posición $\vec{r}$, pero en sentido contrario y solo tiene aceleración normal o centrípeta, ya que al ser constante la velocidad lineal no hay aceleración tangencial.



0.3.2 DINÁMICA

Para comprender los principios fundamentales de la Dinámica clasica, publicados por Newton en 1687, es necesario expilcar los conceptos de fuerza y de masa inercial.

La **fuerza** es una magnitud vectorial que describe las interacciones entre los cuerpos. Las fuerzas son entonces las responsables de las deformaciones de los cuerpos y de los cambios en su estado de movimiento.

La **masa inercial**, o masa inerte, es una propiedad intrínseca de los cuerpos materiales que se representa por un escalar positivo. En el SI se define el kilogramo (kg) como la masa de inercia de un cilindro patrón a partir del cual se establece por comparación el valor del resto de las masas inerciales.

Primer principio de la Dinámica (ley de la inercia)

Los cuerpos y sistemas materiales tienen una propiedad llamada **inercia** por la cual tratan de permanecer en el estado de movimiento que se encuentran: si están en reposo permanecen en reposo, y si se mueven permanecen con la misma velocidad, es decir, con movimiento rectilíneo uniforme.

Si un cuerpo no interacciona con otros, o la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él se anula, mantendrá su estado de movimiento.

- Si un cuerpo está en **reposo** ($v = 0$), sigue en reposo mientras que no actúe una fuerza sobre él.
- Si un cuerpo se mueve y no hay ninguna fuerza que modifique su velocidad, permanece con velocidad constante, en módulo y en dirección, es decir, con un **movimiento rectilíneo uniforme**.

Segundo principio de la Dinámica

Como consecuencia del primer principio, si sobre un cuerpo se aplica una fuerza, este no puede permanecer con el mismo estado de movimiento y, por tanto, acelerará.

Si un cuerpo interactúa con otros de manera que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él no sea cero, adquirirá una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza, donde la constante de proporcionalidad es la masa.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

- Si un cuerpo está en reposo, se pondrá en movimiento en la dirección de la fuerza aplicada, mientras permanezca la fuerza.
- Si un cuerpo está en movimiento cambiará, en función de las características del movimiento, el módulo o la dirección.

Tercer principio de la Dinámica

Si se considera la interacción como una acción mutua entre dos cuerpos, este principio va implícito en los anteriores.

Cuando entre dos cuerpos se ejerce una interacción, esta se manifiesta en ambos con la misma intensidad y de manera simultánea.

- Las fuerzas que aparecen en ambos cuerpos tienen la misma dirección y sentido contrario.
- La aceleración que experimenta cada cuerpo depende de su masa, de tal manera que: $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$

Momento lineal de una partícula

El **momento lineal**, o **cantidad de movimiento**, es una magnitud que interviene en el estudio de muchos procesos y transformaciones, tanto en la física clásica como en la física cuántica y nuclear.

El **momento lineal** $\vec{p}$ de una partícula de masa m se define como el producto de su masa por el vector velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Se trata, por tanto, de un vector que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$. Las unidades de $\vec{p}$ en el SI son kg m s^{-1}.

El momento lineal puede variar si lo hacen los factores de los que depende. Para estudiar esta variación se deriva $\vec{p}$ respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

En el caso en el que la masa es constante, $\frac{dm}{dt} = 0$ y teniendo en cuenta que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, la expresión anterior queda:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Teorema de conservación del momento lineal. La fuerza que actúa sobre una partícula de masa constante es igual a la variación de su momento lineal. Por tanto, si sobre una partícula no actúa ninguna fuerza o la resultante de todas las fuerzas aplicadas es cero, su momento lineal permanece constante:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cte}$$

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza $\vec{F}$ durante un tiempo dt, este experimenta una aceleración que modifica el valor de su velocidad. Por tanto, está cambiando su momento lineal:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\,dt$$

En el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, el cuerpo cambia su velocidad de $\vec{v}_0$ a $\vec{v}$. Si se integran los dos términos de esta expresión:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} m\,d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt$$

Si la fuerza es constante:

$$m(\vec{v} - \vec{v}_0) = \vec{F}\,\Delta t$$

donde el primer término es la variación del momento lineal: $\Delta\vec{p} = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$ y el segundo término es una magnitud denominada **impulso** que produce variaciones en el momento lineal:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

A.10- A un coche de 800 kg en reposo se aplica una fuerza constante durante 15 s con la que adquiere una velocidad de 100 km h^{-1}. Calcula la cantidad de movimiento adquirida por el coche y el valor de la fuerza aplicada.

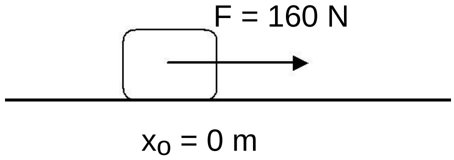
A.11.- Dados los movimientos cuyas ecuaciones corresponden a las siguientes, determina las ecuaciones de las velocidades en t = 2s y las aceleraciones en t = 2s.

a) $\mathbf{r} = (4 - t^2) \cdot \mathbf{i} + t^3 \cdot \mathbf{j}$ m; b) $\mathbf{r} = 10 \cdot t^2 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j}$ m

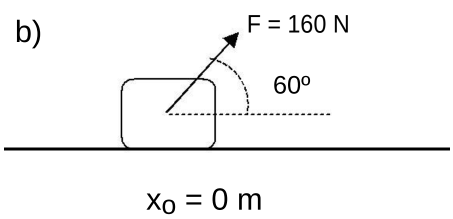
A.12.- Un cuerpo se mueve con velocidad de 72 km/h. Determina el espacio (en metros) que recorre en 3 minutos.

A.13.- Un cuerpo de 20 kg está sometido a una fuerza constante de 160 N como muestra el dibujo. Determina el espacio recorrido y su velocidad a los 10 s, sabiendo que parte del reposo y que el rozamiento es despreciable.

a)



b)

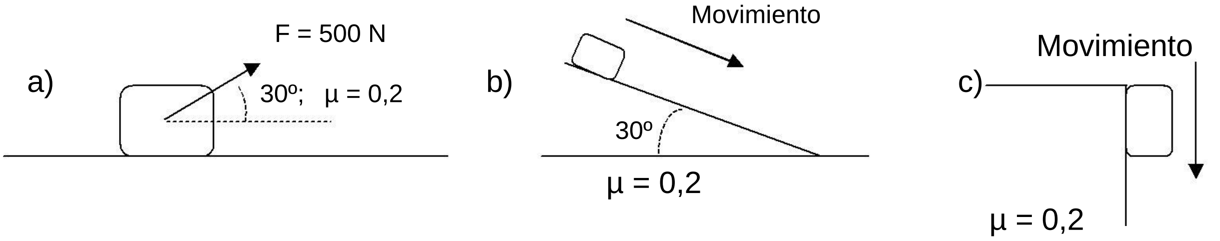


A.14.- Un cuerpo de 50 kg se mueve con MRU a velocidad de 20 m/s por una superficie en la que el rozamiento es despreciable. En un determinado momento entra en una pista rugosa en la que el coeficiente de rozamiento es μ = 0,1.

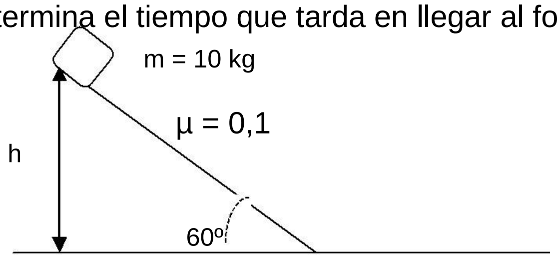
a) Determina cuánto tiempo tarda el cuerpo en reducir su velocidad a la mitad.
b) Determina el espacio que recorre por la superficie rugosa hasta pararse.

A.15.- Un coche de 800 kg describe una curva de 50 m de radio con una velocidad de 36 km/h. Sabiendo que μ = 0,2, determina el valor de todas las fuerzas que actúan sobre el coche. ¿Qué ocurriría si el coche circulase al doble de velocidad? Tomar g como 10 m/s^2.

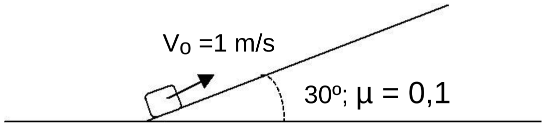
A.16.- Dado un cuerpo de 100 kg, determina la fuerza de rozamiento en los casos siguientes:



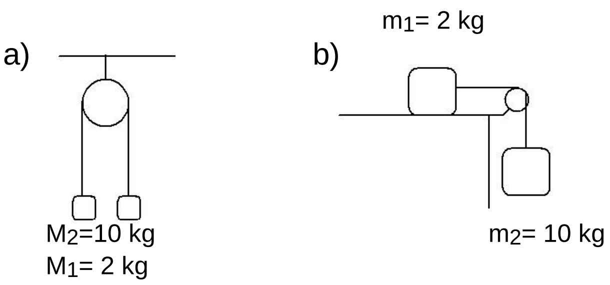
A.17.- Determina el tiempo que tarda en llegar al fondo del plano inclinado el cuerpo del dibujo:



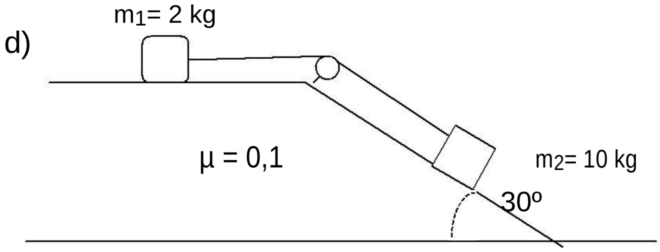
A.18.- Determina el tiempo que tarda en detenerse el cuerpo de 20 kg lanzado hacia arriba en el plano inclinado con velocidad inicial de 1 m/s.



A.19.- Determina la aceleración y la tensión de la cuerda en los siguientes casos:



c) Igual que (b) con μ = 0,1



0.3.3 TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA

Trabajo realizado por una fuerza

- El **trabajo mecánico** realizado por una fuerza constante, $\vec{F}$, que actúa sobre un cuerpo que experimenta un desplazamiento, $\Delta\vec{r}$, es igual al producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento. Es decir:

$$W = \vec{F}\,\Delta\vec{r} = F\,\Delta r \cos\theta$$

- La unidad de trabajo mecánico en el sistema internacional es el **julio (J)**, que se define como el trabajo que realiza una fuerza de 1 N aplicada en la dirección del movimiento para producir un desplazamiento de 1 m. Así pues:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m}$$

- Como consecuencia de la definición, **el trabajo es una magnitud escalar** (exclusivamente numérica).

- Si la **fuerza que actúa es perpendicular al desplazamiento,** no realiza ningún trabajo. La razón es que, en este caso, $\theta = 90°$, por lo que $\cos\theta = 0$ y, en consecuencia, $W = 0$ (figura 12.8.a).
- Si la **fuerza actúa en la misma dirección y sentido del desplazamiento,** el trabajo que realiza es máximo. En este caso, $\theta = 0°$; por tanto, $\cos\theta = 1$ y, en consecuencia, $W = F\,\Delta r$ (figura 12.8.b).
- Si la **dirección de la fuerza forma cierto ángulo con la dirección del desplazamiento,** solo realiza trabajo la componente de la fuerza que actúa en a dirección del desplazamiento. Por la definición del producto escalar, /emos que $F\cos\theta$ es justamente la componente de $\vec{F}$ en la dirección del lesplazamiento (figura 12.8.c).
- Si el **sentido de actuación de la fuerza o de su componente en la direc-ión del desplazamiento es contrario a este,** el trabajo realizado por dicha fuerza es negativo, pues se opone al desplazamiento. Esto ocurre cuando el ingulo que forman F y el desplazamiento tiene un valor de entre 90° y 180°. El coseno de cualquier ángulo comprendido entre esos valores es negativo (figura 12.8.d).

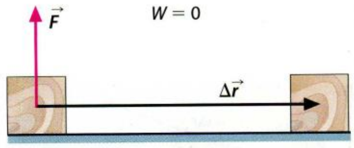


FIGURA 12.8.a.

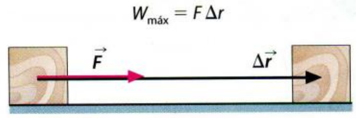


FIGURA 12.8.b.

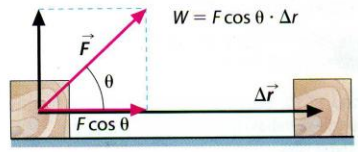


FIGURA 12.8.c.

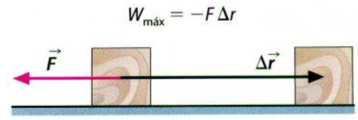


FIGURA 12.8.d.

Trabajo realizado por varias fuerzas

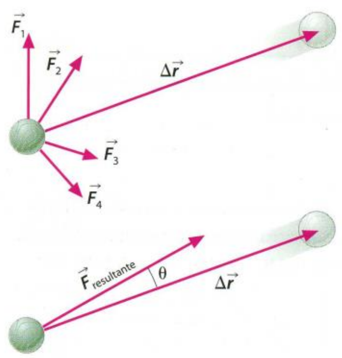


FIGURA 12.10. El trabajo realizado por varias fuerzas equivale al trabajo realizado por la resultante de todas ellas.

Cuando son varias las fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo, entonces el trabajo realizado por dichas fuerzas al desplazar el cuerpo es el mismo que el que realizaría la resultante de todas ellas (figura 12.10). La razón es bien sencilla: podemos imaginar que cada una de las fuerzas que actúan realiza su «trabajo particular» al desplazar el cuerpo entre las posiciones inicial y final, de modo que el trabajo total es la suma de los trabajos efectuados por cada una de ellas. Es decir:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n$$

Si $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ son las fuerzas que actúan mientras el cuerpo se desplaza $\Delta\vec{r}$, entonces:

$$W = \vec{F}_1\,\Delta\vec{r} + \vec{F}_2\,\Delta\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n\,\Delta\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)\,\Delta\vec{r}$$

Ahora bien, la suma vectorial de todas las fuerzas es justamente la resultante de todas ellas. Por tanto, el trabajo efectuado por esas fuerzas equivale al trabajo realizado por la resultante de todas ellas (figura 12.10):

$$W = \Sigma\vec{F}_i\,\Delta\vec{r} = F_{resultante}\,\Delta r\cos\theta$$

Potencia

- Llamamos **potencia** a la rapidez con que se realiza un trabajo. Así pues:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- La unidad de potencia en el SI es el **vatio (W)**, que se define como la potencia desarrollada cuando se realiza el trabajo de 1 julio en 1 segundo: 1 W = 1 J/1 s.

Trabajo y energía cinética: Teorema de las fuerzas vivas

El **trabajo total** realizado sobre un cuerpo es igual a la variación de su **energía cinética:**

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_c$$

Energía potencial gravitatoria

La expresión *mgh* representa el valor de la **energía potencial gravitatoria** a una altura *h* (pequeña) sobre la superficie terrestre. Simbolizaremos como E_p a la energía potencial gravitatoria. Así pues:

$$E_p = mgh$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre los cuerpos es igual a la variación negativa de su energía potencial gravitatoria:

$$W_{grav} = -\Delta E_p$$

Energía potencial elástica

La **energía potencial elástica** en función de la posición *x* se representa como:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

El trabajo realizado por las fuerzas elásticas es igual a la variación negativa de la energía potencial, como ocurría con la fuerza gravitatoria:

$$W_{elástica} = -\Delta E_p$$

Fuerzas conservativas

Las únicas fuerzas conservativas son la fuerza gravitatoria, la fuerza elástica y la fuerza electrostática.

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas solo depende de la posición inicial y final del cuerpo y es independiente de la trayectoria seguida para pasar de un punto a otro. Además, dicho trabajo equivale a la variación negativa de la energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

Teorema de conservación de la energía mecánica

Si todas las fuerzas presentes son conservativas:

$$\Delta E_m = 0$$

Teorema de conservación de la energía

Son fuerzas no conservativas la fuerza de rozamiento, la fuerza de empuje de una persona sobre un cuerpo..., en definitiva cualquier fuerza que no sea gravitatoria, elástica o electrostática.

$$\Delta E_m = W_{fuerzas\,no\,conservativas}$$

A.20 Un cuerpo de 2 kg recorre un espacio de 10 m en ascenso por un plano inclinado de 30º sobre la horizontal, obligado por una fuerza de 15 N paralela al plano. Se sabe que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano tiene un valor de 0,2. Calcula el trabajo total realizado sobre el cuerpo de dos formas diferente:

a) Como la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo.

b) Como el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre el cuerpo.

A.21 Desde lo alto de un plano inclinado de 2 m de longitud y 30º de inclinación se deja resbalar un cuerpo de 500 g al que se imprime una velocidad de 1 m s^{-1}. Supongamos que no existe fricción en todo el recorrido:

a) ¿Con qué velocidad llega a la basa del plano?

b) Si al llegar a la superficie plana choca contra un muelle de constante K=200 n m^{-1}, ¿qué distancia se comprimirá el muelle?

A.22.- Desde lo alto de un plano inclinado de 2 m de longitud y 30º de inclinación se deja resbalar un cuerpo de 500 g al que se imprime una velocidad inicial de 1 m s^{-1}. ¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando llegue al final del plano, si el coeficiente de rozamiento con el plano vale 0,2?

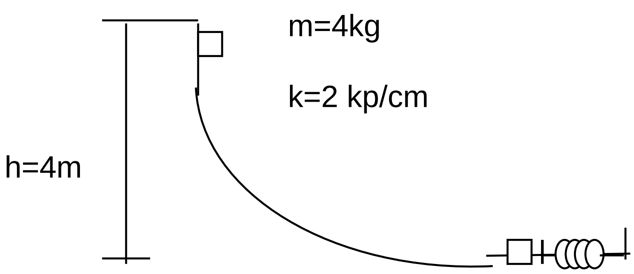
A.23.- A un cuerpo de 5 kg de masa, que lleva una velocidad de 4 m/s se le suministra un trabajo de 10^3J. Calcular:

a) La variación de la energía cinética experimentada por el cuerpo
b) Las energías cinética inicial y final del cuerpo
c) La velocidad final del cuerpo.

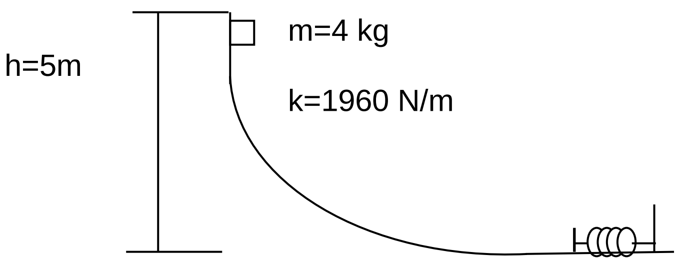
A.24.- A un cuerpo de 5 kg de masa se le aplica una fuerza horizontal de 100 N y el cuerpo recorre una distancia de 10 m. Se sabe que el cuerpo partió del reposo. Calcular:

a) El trabajo suministrado al cuerpo
b) Variación de la energía cinética del cuerpo
c) Velocidad final del cuerpo.

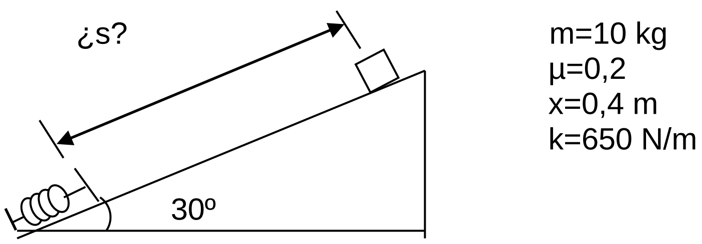
A.25.- Dada la siguiente figura con sus datos, calcular la máxima compresión (deformación) que sufrirá el muelle. Se supone que en todo el trayecto hay rozamiento nulo.



A.26.- Dada la siguiente figura con sus datos, calcular la máxima compresión (deformación) del muelle. En todo el trayecto el Wroz = 102 J.

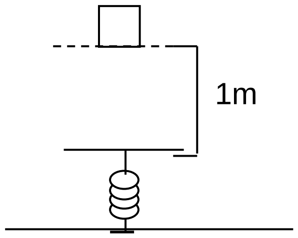


A.27.- Dado el siguiente dispositivo en el que el cuerpo desciende hasta chocar contra el resorte, calcula la incógnita indicada en el dibujo. La máxima deformación del muelle es 0,40 m.

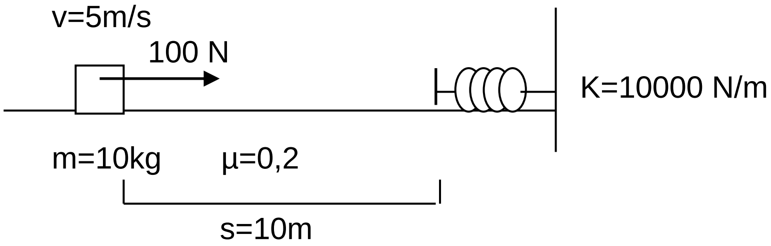


A.28.- Un cuerpo de 0,5 kg se encuentra inicialmente en reposo a una altura de 1 m por encima del extremo libre de un resorte vertical, cuyo extremo inferior está fijo. Se deja caer el cuerpo sobre el resorte y, después de comprimirlo, vuelve a subir. El resorte tiene una masa despreciable y una constante recuperadora (elástica) de 200 N/m.

a) Haga un análisis energético del problema y justifique si el cuerpo llegará de nuevo al punto de partida.
b) Calcule la máxima compresión que experimenta el resorte.



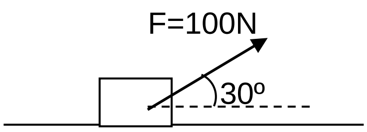
A.29.- Dado el siguiente diagrama con sus datos, calcular la máxima deformación del muelle.



A.30.- ¿Puede ser la energía potencial elástica de un muelle negativa? Razona y comenta la respuesta.

A.31.- Dado el siguiente diagrama con sus datos, calcula:

a) El trabajo realizado por cada fuerza
b) El trabajo neto o trabajo total sobre el sistema.



s = 10 m

m = 10 kg

μ = 0,2

SELECCIÓN DE EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD DEL TEMA 0

Selectividad Andalucía 2004:
1. Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza F, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.
b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza F en un desplazamiento de 200 m del trineo.
Si $g = 10\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** F=109,16 N **b)** W=18907 J
Si $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** F=106,98 N **b)** W=18529,48 J

Selectividad Andalucía 2007:
2. Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo.
b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida.
Si $g = 10\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** h = 0,93 m **b)** v = 3,48 m/s
Si $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** h = 0,95 m **b)** v = 3,49 m/s

Selectividad Andalucía 2008:
3. Un bloque de 5 kg desciende por una rampa rugosa (μ=0,2) que forma 30º con la horizontal, partiendo del reposo.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y analice las variaciones de energía durante el descenso del bloque.
b) Calcule la velocidad del bloque cuando ha deslizado 3 m y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en ese desplazamiento.
Si $g = 10\ m\ s^{-2}$: **SOL: b)** 4,43 m/s ; W_{ROZ}= - 26 J
Si $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$: **SOL: b)** 4,38 m/s ; W_{ROZ}= - 25,46 J

Selectividad Andalucía 2006:
4. Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un muelle, de constante elástica 500 N m^{-1}, comprimido 20 cm. Al liberar el muelle el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado 30º con la horizontal. Calcule la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado.
a) Supuesto nulo el rozamiento
b) Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es 0,1.
Si $g = 10\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** d = 1,02 m **b)** d=0,67 m
Si $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$: **SOL: a)** d = 1 m **b)** d=0,65 m

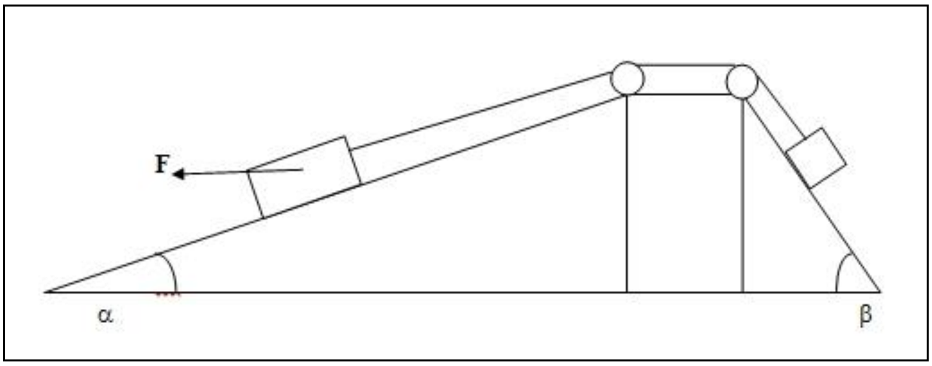
Selectividad Andalucía 2013:
5. Un bloque de 5 kg se desliza con velocidad constante por una superficie horizontal rugosa al aplicarle una fuerza de 20 N en una dirección que forma un ángulo de 60º con la horizontal.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, indique el valor de cada una de ellas y calcule el coeficiente de rozamiento del bloque con la superficie.
b) Determine el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desplaza 2 m y comente el resultado obtenido.
SOL: a) F_x= 10 N ; F_y=17,32 N; F_g=49 N ; N=31,68 N; F_{roz}=10 N
b) W_F=20 J; W_N=W_g=0 J; W_{roz}=-20 J; W_{total}= 0 J

Selectividad Andalucía junio 2021:
a) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura h con una energía cinética igual a la potencial en dicho punto, tomando como origen de energía potencial el suelo. Explique razonadamente, utilizando consideraciones energéticas: i) La relación entre la altura inicial y la altura máxima que alcanza el cuerpo. ii) La relación entre la velocidad inicial y la velocidad con la que llega al suelo.
b) Un cuerpo de masa 2 kg desliza por una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento 0,2 con una velocidad inicial de 6 m s-1 . Cuando ha recorrido 5 m sobre el plano horizontal, comienza a subir por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Utilizando consideraciones energéticas, determine: i) La velocidad con la que comienza a subir el cuerpo por el plano inclinado. ii) La distancia que recorre por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima.
SOL: a) i) h_2= 2 h_1 ii) v_3= ($2^{1/2}$) v_1 **b)** i) v_2=4,05 m s^{-1} ii) d=1,67 m

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 0

1- a) 5**i+2j** b) 5**i**-2**j** c) 3**i** + 4**j** d) 12**i** e) **D**=2**i** ; **E**=2**j**
2- a) A=$\sqrt{13}$; B=$\sqrt{17}$; C=$\sqrt{20}$ b) 0 c) gráfico d) 2**A**=6**i**+4**j; -**3**B**=-3**i**+12**j**
3- **i j** = 0 **; i k** = 0 ; **k j** = 0 ; **i i** = 1 ; **j j** = 1 ; **k k** =1
4- a) **A B** = 6 b) **B C** = -16 b)70,6º
5- **i x j** = **k ; i x k** = **-j** ; **k x j** = **-i** ; **i x i** = **k** ; **j x j** = 0 ; **k x k** =0
6- a) **i**-2**j**-7**k** b) 10**i**+**j**-7**k** c) 82,3º
7- a) $12x^3+4x$ b) $-9x^{-4}-6x^2$ c) 20 cos(4x+3) d) -28 sen(4x+3)
8- a) 21 b) 7 c) -3,67 d) 8,1
9- a) -0,01**i**+1,047**j**+40**k** b) -60 sen2t **i** + 60 cos 2t **j** + 40 **k** c) -1,675**i** + 59,977**j** + 40**k** d) -120 cos2t **i -** 120 sen 2t **j**
10- 22222 kg m s^{-1} ; 1481,5 N
11- a) **v** = -4**i** + 12**j** m s^{-1} ; **a**= -2i + 12**j** m s^{-1} b) **v** = 40**i** m s^{-1} ; **a**= 20**i** m s^{-1}
12- 3600 m
13- a) 400 m ; 80 m s^{-1} b) 200 m ; 40 m s^{-1}
14- a) t = 10,20 s b) 204,08 m
15- $F_c = F_{roz}$ = 1600 N ; derraparía
16- a) 146 N b) 169,74 N c) 0 N
17- 0,53$\sqrt{h}$
18- 0,17 s
19- a) 6,53 m s^{-2} ; 32,7 N b) 8,17 m s^{-2} ; 16,33N c) 8,00 m s^{-2} ; 18,0 N d) 3,21 m s^{-2} ; 8,4 N
20- 18,1 J
21- a) 4,54 m s^{-1} b) 22,6 cm
22- 3,71 m s^{-1}
23- a) 1000 J b) 40 J ; 1040 J c) 20,4 m s^{-1}
24- a) 1000 J b) 1000 J ; 20 m s^{-1}
25- 0,4 m
26- 0,31 m
27- 1,22 m
28- a) consultar la teoría b) 0,247 m
29- 0,44 m
30- No
31- a) $W_{FN} = W_P = W_N$ = 0 J ; W_{FT} = 866,03 N ; $W_{F\,ROZ}$ = - 96 J b) 770,03 J

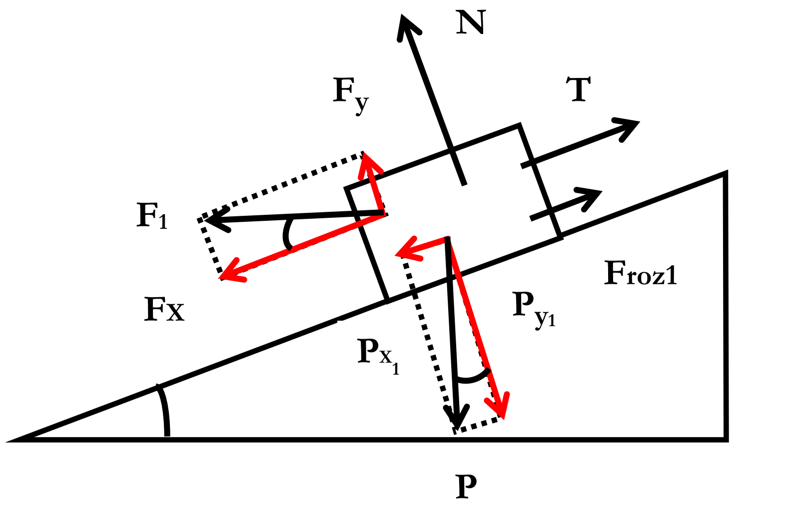
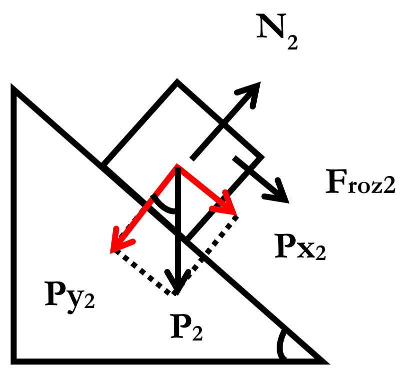
Observa la disposición de los dos bloques de la figura y responde a las siguientes cuestiones:



a- Dibuja en un esquema las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques.
b- Indica la expresión para calcular cada una de las fuerzas intervinientes.
c- Escribe las ecuaciones necesarias para poder calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Observaciones:

- El cuerpo rectangular lo llamaremos cuerpo 1 y al cuerpo cuadrado cuerpo 2.
- El sistema se desplaza hacia la izquierda (según las poleas en sentido contrario a las agujas del reloj).
- Existe rozamiento entre cada uno de los cuerpos y el plano inclinado, utilizaremos μ para el coeficiente de rozamiento.

<table>
<tr><td>a</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$F_x = F \cdot \cos a$
$F_y = F \cdot \text{sen } a$
$P_1 = m_1 \cdot g$
$P_{x1} = P_1 \cdot \text{sen } a$
$P_{y1} = P_1 \cdot \cos a$
$N_1 + F_y = P_{y1} \Longrightarrow N_1 = P_{y1} - F_y$
$F_{roz1} = \mu \cdot N_1$</td><td>$P_2 = m_2 \cdot g$
$P_{x2} = P_2 \cdot \text{sen } b$
$P_{y2} = P_2 \cdot \cos b$
$N_2 = P_{y2}$
$F_{roz2} = \mu \cdot N_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c</td><td colspan="2">El apartado (c) se responde con una de las dos siguientes opciones:</td></tr>
<tr><td>$F_x + P_{x1} - F_{roz1} - P_{x2} - F_{roz2} = (m_1 + m_2) \cdot a$

$F_x + P_{x1} - F_{roz1} - T = m_1 \cdot a$</td><td>$F_x + P_{x1} - F_{roz1} - P_{x2} - F_{roz2} = (m_1 + m_2) \cdot a$

$T - P_{x2} - F_{roz2} = m_2 \cdot a$</td></tr>
</table>

FORMULARIO DE MECÁNICA: CINEMÁTICA-DINÁMICA-ENERGÍA

Nº	LEY / CONCEPTO	FÓRMULA	SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS	UTILIDAD
1	Expresión vectorial del vector de posición, de la velocidad y de la aceleración	$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$ $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$	$\vec{r}$: vector de posición $\vec{v}$: velocidad (instantánea) $\vec{a}$: aceleración (instantánea) $\vec{i}$: vector unitario en el eje X $\vec{j}$: vector unitario en el eje Y $\vec{k}$: vector unitario en el eje Z	Es la forma de expresar la posición, velocidad y aceleración de un punto material respecto a un eje cartesiano tridimensional.
2	Cálculo infinitesimal para la velocidad y la aceleración	$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\frac{d\vec{r}}{dt}$: derivada del vector de posición respecto al tiempo $\frac{d\vec{v}}{dt}$: derivada de la velocidad respecto al tiempo	Permite conocer la expresión de la velocidad a partir de la ecuación de la posición o la expresión de la aceleración a partir de la velocidad.
3	Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	$x = x_o + v \cdot t$	x : posición final x_o : posición inicial v : velocidad (constante) t : tiempo	Sirve para conocer la posición de un punto material que se desplaza con velocidad constante (en módulo y dirección)
4	Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)	$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $v = v_o + a \cdot t$	v_o : velocidad inicial a : aceleración (constante) v : velocidad final	Son las ecuaciones del MRUA y calculan la posición y la velocidad en cualquier instante.
5	Definición de seno y coseno de un ángulo	$c = h \cdot \cos\alpha$ $o = h \cdot sen\,\alpha$	α : ángulo de un triángulo rectángulo c : cateto contiguo al ángulo α **o**: cateto opuesto al ángulo α h : hipotenusa	Se suele utilizar para descomponer una magnitud vectorial bidimensional (velocidad, fuerza…) en sus dos componentes perpendiculares.
6	2ª Ley de Newton (Ley Fundamental de la Dinámica)	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\Sigma\vec{F}$: sumatorio de las fuerzas que se ejercen sobre un sistema material (también se llama fuerza resultante, fuerza neta o fuerza total) m : masa del sistema $\vec{a}$: aceleración del sistema	Indica la relación entre la fuerza que se ejerce sobre un sistema material y la aceleración que experimenta. Es la ecuación más utilizada de la física clásica.

7	2ª Ley de Newton (Ley Fundamental de la Dinámica) descompuesta en un eje cartesiano bidimensional	$\Sigma F_x = m \cdot a_x$ $\Sigma F_y = m \cdot a_y$	m : masa del sistema material ΣF_x : sumatorio de las fuerzas ejercidas sobre el sistema en el eje X (fuerzas a favor menos fuerzas en contra respecto al eje X) a_x : aceleración experimentada en el eje X ΣF_y : sumatorio de las fuerzas ejercidas sobre el sistema en el eje Y (fuerzas a favor menos fuerzas en contra respecto al eje Y) a_y : aceleración experimentada en el eje Y	Sirve para simplificar el cálculo en la Ley Fundamental de la Dinámica descomponiendo el movimiento en dos ejes perpendiculares.
8	Peso	$P = m \cdot g$	P : peso m : masa g : aceleración de la gravedad (o intensidad del campo gravitatorio)	Calcula el valor el peso de un cuerpo si se conoce la masa del mismo y el valor de la aceleración de la gravedad en el lugar donde se encuentra el cuerpo.
9	Fuerza de rozamiento	$F_{roz} = \mu \cdot N$	F_{roz} : fuerza de rozamiento μ : coeficiente de rozamiento N : fuerza normal (es la que ejerce la superficie donde se apoya el cuerpo sobre éste)	Permite conocer el valor máximo de la fuerza de rozamiento.
10	Fuerza centrípeta	$F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$	F_c : fuerza centrípeta m : masa a_c : aceleración centrípeta v : velocidad R : radio de giro	Sirve para calcular el valor de una fuerza de naturaleza centrípeta (que apunta hacia el centro en un movimiento circular).
11	Fuerza elástica	$F_e = k \cdot \Delta x$	F_e : fuerza elástica k : constante elástica Δx : deformación elástica (se indica también con x)	Relaciona la fuerza elástica con la deformación sufrida por el cuerpo elástico.
12	Trabajo realizado por una fuerza constante	$W_F = F \cdot d \cdot \cos\alpha$	W_F : trabajo realizado por la fuerza F F : módulo de la fuerza d : distancia recorrida $\cos\alpha$: coseno del ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento	Esta expresión sólo es válida cuando la fuerza se mantiene constante en módulo y dirección.

13	Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	E_c : energía cinética m : masa v : velocidad	Cálculo de la energía cinética
14	Energía potencial gravitatoria	$(E_p)_g = m \cdot g \cdot h$	$(E_p)_g$: energía potencial gravitatoria m : masa g : aceleración de la gravedad h : altura	Cálculo de la energía potencial gravitatoria (es necesario conocer el valor de g en ese lugar).
15	Energía potencial elástica	$(E_p)_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2$	$(E_p)_e$: energía potencial elástica k : constante elástica Δx : deformación elástica (también se indica con x)	Cálculo de la energía potencial elástica.
16	Energía mecánica	$E_m = E_c + E_p$	E_m : energía mecánica E_c : energía cinética E_p : energía potencial (gravitatoria, elástica o eléctrica)	Definición de energía mecánica.
17	Teorema de la energía cinética o Teorema de las Fuerzas Vivas	$W_{F_{total}} = \Delta E_c$	$W_{F_{total}}$: trabajo total ΔE_c : incremento de la energía cinética	Hay que tener en cuenta que en la expresión del trabajo se refiere al trabajo realizado por las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo.
18	Teorema de la energía potencial	$W_{F_{cons}} = -\Delta E_p$	$W_{F_{cons}}$: trabajo realizado por las fuerzas conservativas ΔE_p : incremento de las energías potenciales (asociadas a las fuerzas conservativas)	Trabajo realizado por las fuerzas conservativas
19	Teorema de conservación de la energía mecánica	$\Delta E_m = 0$	ΔE_m : incremento de la energía mecánica	Si todas las fuerzas que se ejercen son conservativas entonces se conserva la energía mecánica.
20	Teorema de conservación de la energía	$\Delta E_m = W_{F_{no\ cons}}$	ΔE_m : incremento de la energía mecánica $W_{F_{no\ cons}}$: trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (cualquier fuerza que no sea gravitatoria, elástica o eléctrica)	Este teorema se cumple siempre ya que incluye al teorema de conservación de la energía mecánica, cuando todas las fuerzas sean conservativas.