TEMA 1

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. INTRODUCCIÓN. FUERZAS CONSERVATIVAS.

1.1.- Energía y trabajo

> *"**Energía es la capacidad de un cuerpo o sistema material que le permite transformarse o actuar sobre otro cuerpo o sistema material para provocarle transformaciones**".* Se mide en Julios

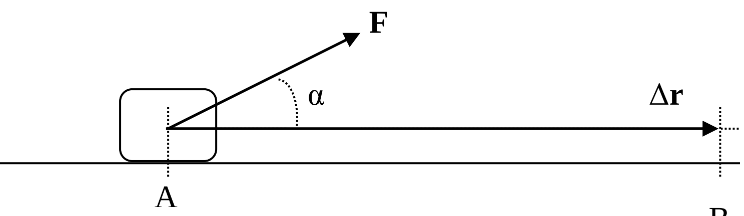
La energía puede **transformarse** o **transferirse** de unos cuerpos o sistemas materiales a otros.

Ejemplos:

- Un cuerpo en caída libre **transforma** su energía potencial gravitatoria en energía cinética.
- Un cuerpo que se desplaza sobre una superficie con la que roza pierde energía cinética y la **transforma** en parte energía interna (térmica) de sí mismo y en parte la **transfiere** a la superficie con la que roza y al ambiente también como energía interna (térmica).

El trabajo es una forma de transferencia de energía del sistema que lo realiza al sistema sobre el que se realiza. Se mide en Julios.

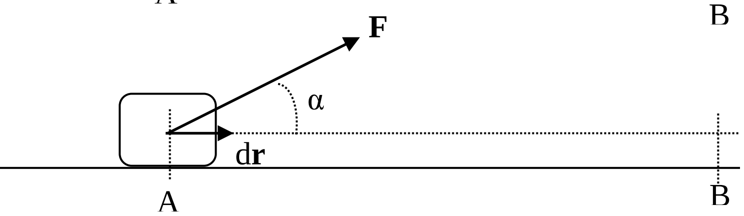
El sistema que realiza trabajo interacciona con aquel sobre el que lo realiza ejerciendo una fuerza, F, que provoca, mientras dura su acción, un desplazamiento, Δr, desde la posición inicial, A, hasta la posición final B.



Si la fuerza ejercida es constante durante todo el desplazamiento, el trabajo realizado, W, es:

$W_A^B = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta r = \boldsymbol{F}_t \cdot \Delta\boldsymbol{r}$

(donde F_t es la fuerza efectiva en la dirección del desplazamiento)



Pero si la fuerza ejercida no es constante, conviene dividir la trayectoria en desplazamientos infinitesimales, d**r**, en los que la fuerza no cambie apreciablemente.

En cada uno de los desplazamientos infinitesimales considerados el trabajo infinitesimal realizado corresponde a:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

El trabajo a lo largo de todo el desplazamiento se determinará sumando todos los trabajos infinitesimales considerados. Esta suma de infinitos términos infinitesimales se resuelve mediante la integral definida:

$$W_A{}^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cdot \cos\alpha \cdot dr = \int_A^B \vec{F}_t \cdot d\vec{r}$$

1.2.-Fuerzas conservativas. Teorema de la energía potencial

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza una fuerza opuesta a la conservativa puede ser almacenado en forma de energía potencial.

El **teorema de la energía potencial** se cumple únicamente para fuerzas conservativas y establece lo siguiente:

"El trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos corresponde al opuesto del incremento de energía potencial experimentada por el sistema"

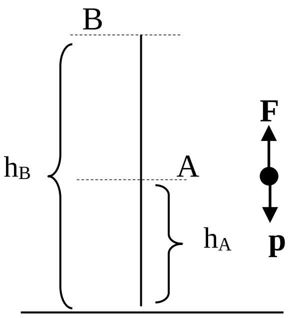
$$W_{\text{Fuerza conservativa}} = -(Ep_{\text{final}} - Ep_{\text{inicial}}) = -\Delta Ep$$

Todo cuerpo sobre el que actúe una fuerza conservativa tendrá una energía potencial asociada. La energía potencial no tiene un valor absoluto. Para determinarla es necesario elegir una posición como referencia en la que el valor de la energía potencial sea nulo y determinar respecto a ella el valor de energía potencial en cualquier otra posición, aplicando el teorema de la energía potencial.

Ejemplos de fuerzas conservativas:

1º) La fuerza peso es conservativa.

Para subir con velocidad constante un cuerpo desde una altura, h_A, hasta otra altura superior, h_B, habrá que ejercer una fuerza del mismo valor que el peso del cuerpo, pero de sentido contrario.



$\mathbf{g} = -g\cdot\mathbf{j}$ (g≈cte)

$\mathbf{F} = -\mathbf{p} = -m\cdot\mathbf{g} = mg\cdot\mathbf{j}$

$d\mathbf{h} = dh\cdot\mathbf{j}$

El trabajo realizado por **F** para ir desde h_A hasta h_B, es:

$$W_A{}^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{h}$$

$$W_A{}^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{h} = \int_A^B mg\cdot\vec{j}\cdot dh\cdot\vec{j} =$$

$$= mg\cdot[h]_A^B = .mg(h_B - h_A) = mgh_b - mgh_A = (Ep_B - Ep_A) = \Delta Ep_g$$

La energía suministrada al realizar el trabajo hace aumentar la energía potencial gravitatoria del cuerpo en ΔEp_g y dicho incremento de energía potencial gravitatoria puede ser devuelto si el cuerpo cae desde h_B hasta h_A, sometido exclusivamente a la fuerza peso.

El trabajo realizado por **p** para ir desde h_B hasta h_A , es :

$$(W_B{}^A)_{Peso} = \int_B^A \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_B^A (-mg\,\vec{j})\cdot(dy\,\vec{j}) = -mg\int_B^A dy = -mg(y_A - y_B) = -(mgy_A - mgy_B) = -\Delta Ep_g$$

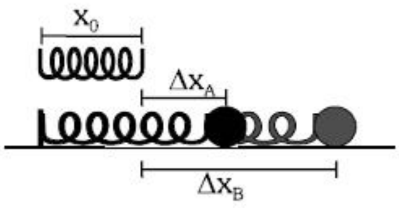
Puede observarse que el trabajo realizado por la fuerza conservativa peso corresponde al opuesto del incremento de energía potencial gravitatoria, como establece el teorema de la energía potencial.

Podemos comprobar que el teorema de la energía potencial también se cumple si calculamos el trabajo realizado por el peso para ir desde h_A hasta h_B:

$$(W_A{}^B)_{Peso} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-mg\ \vec{j}) \cdot (dy\ \vec{j}) = -mg \int_A^B dy = -mg(y_B - y_A) = -(mgy_B - mgy_A) = -\Delta Ep_g$$

2º) La fuerza elástica es conservativa.

Para alargar un resorte una longitud x hay que ejercer una fuerza del mismo valor que la fuerza elástica recuperadora, pero de sentido contrario.



(**x**= x·**i** ; d**r** = dx·**i**)

Ley de Hooke : **F$_{el}$** = -kx·**i**

Unidades en el SI: F(N), x(m); k(N/m)

Energía potencial elástica:

$Ep_e = 1/2kx^2$

$$(W_A{}^B)_F = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B kx\ \vec{i} \cdot dx\ \vec{i} = \int_A^B kx \cdot dx = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}k(x_B)^2 - \frac{1}{2}k(x_A)^2 = Ep_B - Ep_A = \Delta Ep$$

La energía suministrada al realizar el trabajo hace aumentar la energía potencial elástica del resorte en ΔEp_e y dicho incremento de energía potencial elástica puede ser devuelto si el resorte recupera su longitud inicial, sometido exclusivamente a la fuerza elástica recuperadora. El trabajo realizado por la fuerza elástica desde A hasta B, es:

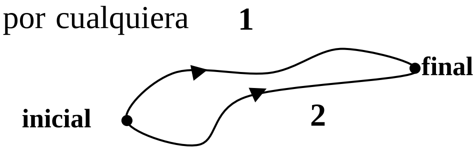
$$(W_A{}^B)_{Fuerza\ elástica} = \int_A^B \vec{F_e} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -kx\ \vec{i} \cdot dx\ \vec{i} = -\int_A^B kx \cdot dx = -\left[\frac{kx^2}{2}\right]_A^B = -\left[(\frac{1}{2}k(x_B)^2 - \frac{1}{2}k(x_A)^2\right] = Ep_A - Ep_B = -\Delta Ep$$

Puede observarse que el trabajo realizado por la fuerza conservativa elástica corresponde al opuesto del incremento de energía potencial elástica, como establece el teorema de la energía potencial.

<u>Propiedades de las fuerzas conservativas</u>

- El trabajo realizado por una fuerza conservativa para desplazar un cuerpo sólo depende de la posición inicial y final en dicho desplazamiento. Entre una determinada posición inicial y una determinada posición final, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es el mismo independientemente de la trayectoria seguida.

  En la trayectoria (1) y en la trayectoria (2) las posiciones inicial y final son las mismas, por lo tanto la fuerza conservativa realizaría un mismo trabajo al desplazar un cuerpo por cualquiera de dichas trayectorias.

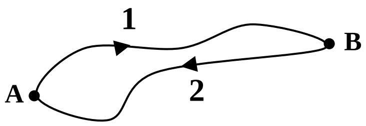


Según el teorema de la energía potencial:

$$W = -(Ep_{final} – Ep_{inicial})$$

El trabajo sólo depende de las energías potenciales del cuerpo en las posiciones inicial y final y es independiente del camino seguido para ir de una a la otra.

- Las fuerzas conservativas no realizan trabajo cuando el cuerpo sobre el que actúan describe una trayectoria cerrada, volviendo a su posición inicial.



En la trayectoria (2) se realiza el mismo trabajo pero con signo opuesto que en la trayectoria (1), pues las posiciones inicial y final se invierten:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = -(Ep_B – Ep_A) \\ W_2 = -(Ep_A - Ep_B) \end{array}\right\} \text{ De donde, } W_1 = -W_2$$

Como en la trayectoria cerrada se realizan los trayectos (1) y (2) consecutivamente,

$$W = W_1 + W_2 = 0.$$

Se puede concluir, a modo de resumen, que las **fuerzas conservativas**:

- Son fuerzas bajo cuya acción se conserva la energía mecánica del sistema.
- El trabajo que realizan las fuerzas que se oponen a las fuerzas conservativas no se pierde, sino que se conserva en el sistema en forma de energía potencial.
- El trabajo que realiza una fuerza conservativa sólo depende de la posición inicial y final, pero no de la trayectoria seguida. En consecuencia, si esta trayectoria es cerrada, de modo que la posición inicial y final coinciden, el trabajo realizado por dicha fuerza es nulo.
- El trabajo realizado por una fuerza conservativa equivale al incremento negativo de la energía potencial del sistema (teorema de la energía potencial).

1.3.-<u>Teorema de la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas</u>

“El trabajo total suministrado a un cuerpo se invierte en variar su energía cinética”

Mientras que el teorema de la energía potencial sólo se puede aplicar para fuerzas conservativas, el teorema de la energía cinética se cumple para todo tipo de fuerzas (conservativas y disipativas; como las de rozamiento).

$$W_A{}^B = \Delta Ec = Ec_B – Ec_A = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$$

Demostración:

$$W_A{}^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\cdot\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{V_A}^{V_B} m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\cdot\left[\frac{v^2}{2}\right]_{V_A}^{V_B} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left[v^2\right]_{V_A}^{V_B} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot(v^2{}_B - v^2{}_A) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2{}_B - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2{}_A = Ec_B - Ec_A = \Delta Ec$$

1.4.- Principio de conservación de la energía mecánica

La energía mecánica de un sistema corresponde a la suma de su energía cinética y de su energía potencial.

El principio de conservación de la energía mecánica es un caso particular del principio general de conservación de la energía ("La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma).

El principio de conservación de la energía mecánica establece que ***cuando sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica de un sistema permanece constante*** (no cambia en las diferentes posiciones, A, B, C, … que ocupe un cuerpo)

$$Em_A = Em_B = Em_C = \text{constante}$$

Demostración:

Cuando sólo actúan fuerzas conservativas se cumple que el trabajo de dichas fuerzas corresponde al opuesto del incremento de la energía potencial (teorema de la energía potencial) y así mismo también se cumple que dicho trabajo también corresponde al incremento de energía cinética (teorema de la energía cinética)

$$\left.\begin{array}{l} W_{total} = W_A{}^B = \Delta Ec \\ \\ W_{total} = W_A{}^B = -\Delta Ep \end{array}\right\}$$

Igualando las dos expresiones de W_{total} llegamos a:

$\Delta Ec = -\Delta Ep$; $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$; $Ec_B - Ec_A + Ep_B - Ep_A = 0$

$Ep_B + Ec_B = Ep_A + Ec_A \Longrightarrow Em_B = Em_A$

Si la energía potencial corresponde a energía potencial gravitatoria y a energía potencial elástica, la expresión anterior se convierte en:

$$\underbrace{m\cdot g\cdot h_B}_{(Ep_{grav})_B} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_B^2}_{(Ep_{elast})_B} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{Ec_B} = \underbrace{m\cdot g\cdot h_A}_{(Ep_{grav})_B} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_A^2}_{(Ep_{elast})_B} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{Ec_B} = \text{constante}$$

1.5.- Principio general de conservación de la energía

Suponiendo que en un sistema actúen fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas y aplicando el Principio general de conservación de la energía, se puede demostrar que las únicas fuerzas que hacen variar la energía mecánica son las fuerzas no conservativas.

Aplicando el teorema de la energía cinética: Wtotal = Wnc + Wc = ΔEc

Según el teorema de la energía potencial $W_C = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = -\Delta Ep$

El trabajo de las fuerzas no conservativas es: $W_{NC} = \int_A^B \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$

Relacionado las expresiones anteriores llegaremos a:

$$\Delta Ec = Wnc + Wc \Longrightarrow \Delta Ec = Wnc - \Delta Ep$$

Reordenando términos,

$$\Delta Ec + \Delta Ep = Wnc \Longrightarrow \boxed{Wnc = \Delta Em} \Longrightarrow \boxed{Wnc = Em_B - Em_A}$$

Con esto se demuestra que el cambio de energía mecánica de un sistema corresponde al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

CUESTIONES Y PROBLEMAS-1

*1.- A un cuerpo de 4 kg de masa se le aplica una fuerza que es directamente proporcional a la distancia recorrida (**F**=2x·**i**). Se sabe que el cuerpo llevaba una velocidad de 2m/s en x=0. Calcular:*

a) Trabajo suministrado al cuerpo desde el punto x=0 al punto x=4

b) Variación de la energía cinética experimentada por el cuerpo entre esos dos puntos.

c) Velocidad final del cuerpo en x=4.

(Todos los datos están en unidades del sistema internacional).

2.- Responde a las siguientes cuestiones:

a) Define los términos "fuerza conservativa" y "energía potencial". Explica la relación entre ambos.

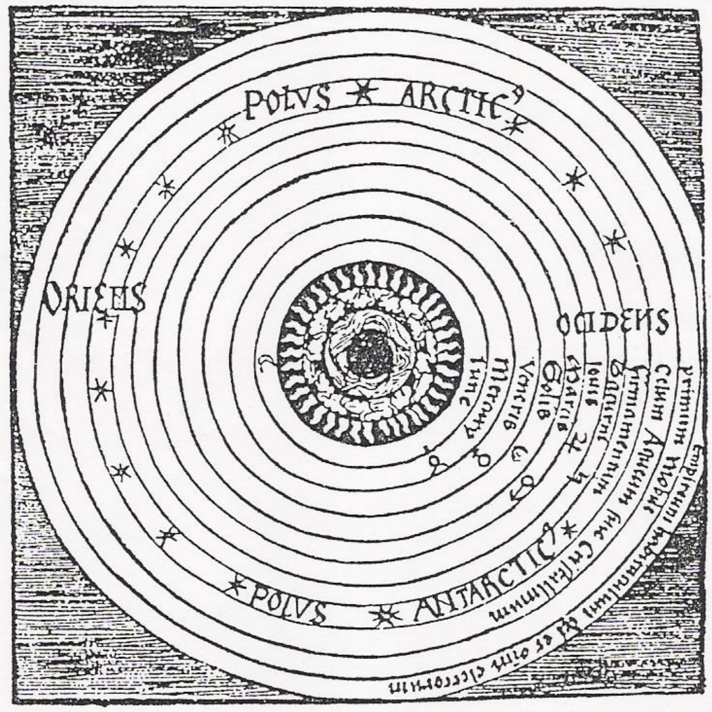
b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa? Razona las respuestas.

3.- Un campo de fuerzas conservativo que actúa en el eje x tiene la siguiente expresión de la fuerza en función de la distancia al origen: $\boldsymbol{F} = x^2 \cdot \boldsymbol{i}$. *Calcula la variación de energía potencial y la variación de la energía cinética entre los puntos A(x=1) y B(x=3). Todos los datos están en el SI.*

2. TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

2.1.- Evolución de los modelos del movimiento planetario. Leyes de Kepler

La obra de Aristóteles (384-322 a. de C.) perduró largo tiempo. Quizás una razón por la que el trabajo de Aristóteles tuvo tanto atractivo fue su enorme amplitud. El Filósofo formuló un concepto de la estructura del universo y una teoría del movimiento. Ambos eran inseparables y naturalmente relacionados e interdependientes. Juntas constituían una visión completa que durante mucho tiempo sirvió de guía a los pensadores que se ocupaban de estos temas.



Una antigua concepción medieval del mundo. La esfera de la Luna separa la región terrestre (compuesta de capas concéntricas de los cuatro elementos, Tierra, Agua, Aire y Fuego) de la región celestial. Más allá de la Luna están las esferas concéntricas portadoras de Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas. (De un grabado de 1508.)

Para Aristóteles el centro de la Tierra era el centro mismo del Universo. Estaba claro que podían verse sin dificultad los "siete planetas" de la antigüedad, que ya habían sido reconocidos desde hacia miles de años (Luna, Sol, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), cruzando el cielo -girando "obviamente" alrededor del centro del cosmos-. El movimiento circular era la perfección y así, con bastante lógica, Aristóteles imaginó los planetas, cada uno suspendido en una de las siete esferas concéntricas transparentes. La octava esfera transportaba la cúpula de estrellas; y todo giraba alrededor de una Tierra inmóvil.

El Filósofo sostenía que toda la materia terrestre estaba compuesta de cantidades diferentes de los “cuatro elementos clásicos -tierra, agua, aire y fuego-”. Por el contrario, la región que se extendía más allá de la Luna era eterna; lo había sido siempre y, por consiguiente, debía ser inmutable e incorruptible. Por tanto, el dominio celestial debía estar compuesto de un quinto elemento perfecto, el éter.

Evolución de la astronomía

Naturalmente, el problema del movimiento planetario persistió. Había dos modos principales de enfocar el problema después de Aristóteles: la teoría heliocéntrica, y la teoría geocéntrica modificada.

Aristarco de Samos (siglo III a. de C.), influido, quizás, por Heráclito de Ponto (siglo IV a. de C.), sugirió que podría resultar un esquema simple del mundo si se colocase el Sol en el centro del Universo, y si la Luna, la Tierra y los cinco planetas entonces conocidos, girasen a su alrededor con distintas velocidades y en órbitas de distintas dimensiones.

Ptolomeo propuso en su obra el Almagesto (140 d. de C.) un sistema astronómico muy útil pues permitió predecir con notable exactitud el movimiento de los cuerpos celestes observándolos. En este sistema la Tierra ocupaba el centro del universo, y los demás cuerpos celestes, incluido el Sol, se movían alrededor de la Tierra. Cada cuerpo describía círculos, llamados epiciclos, al mismo tiempo que el centro de ese círculo se desplazaba sobre otro círculo, llamado deferente, alrededor de la Tierra. Lo esencial de este sistema era que la Tierra ocupaba el centro y que los movimientos eran siempre circulares.

Obsérvese que el modelo de Ptolomeo esta basado en las ideas de Aristóteles pues es un modelo geocéntrico que admite movimientos circulares para los planetas e inmovilidad de la Tierra.

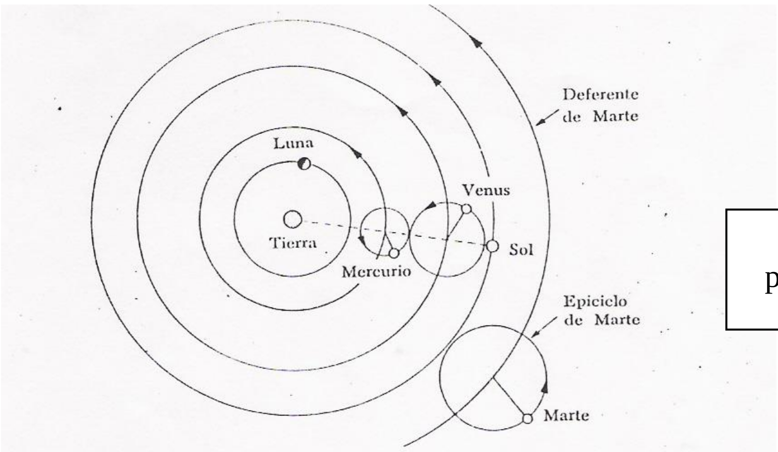


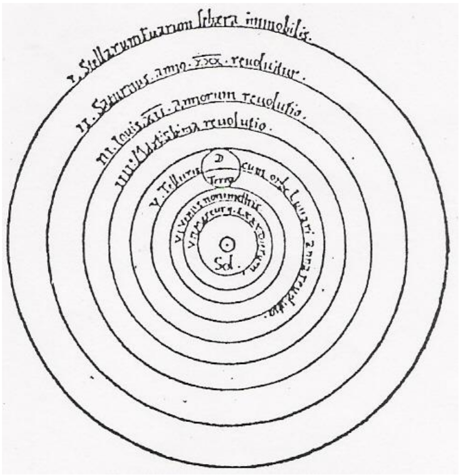
Diagrama parcial y esquemático del sistema de Ptolomeo del movimiento planetario.

Esquema del sistema propuesto por Ptolomeo

Copérnico en su De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543) publicado próximo a su muerte, introdujo un modelo matemático en el que la Tierra tenía tres movimientos uniformes separados. Giraba en una gran órbita circular alrededor del Sol, rotaba sobre un eje inclinado y a su vez éste eje tenía lo que después se ha llamado movimiento de precesión, es decir que cambia de posición.

Como se sabe el sistema copernicano tuvo grandes dificultades para ser admitido. Las características esenciales de este modelo eran:

1) E1 Sol ocupa el centro.
2) Los movimientos son circulares.
3) Los movimientos son uniformes.



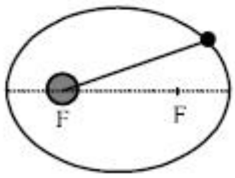
Esquema del sistema propuesto por Copérnico

Galileo jugó un papel importante en la difusión de la teoría copernicana. Con sus telescopios observó repetidamente la superficie de la Luna y comprobó las irregularidades en la misma; eso contribuyó a ir desmontando la idea de la separación entre los cielos perfectos, reflejo de la divinidad, y la tierra imperfecta, como corresponde a la condición humana.

Leyes de Kepler del movimiento planetario.

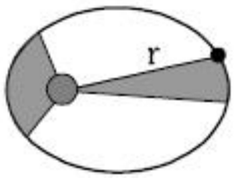
1ª Ley de Kepler: "Ley de las órbitas".

"Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse".



2ª Ley de Kepler: "Ley de las áreas".

"Las áreas barridas por los radiovectores que unen el Sol y el planeta, son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas. Esto quiere decir que la velocidad aerolar es una constante".

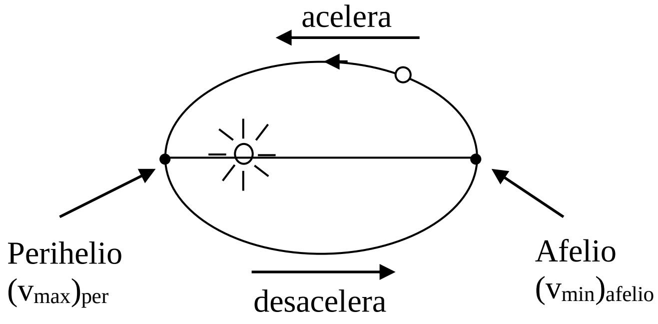


$$(v_{Aerolar})_{inst} = \frac{dA}{dt} = cte$$

$$v_{Aerolar} = \frac{área}{t} = cte$$

Esto quiere decir que en tiempos iguales se barren áreas iguales. Por lo tanto, los planetas se mueven con velocidad creciente cuando pasan cerca del Sol (distancias pequeñas) y frenan gradualmente cuando van alejándose en la órbita.

$F_{N\ perh} > F_{N\ afelio}$

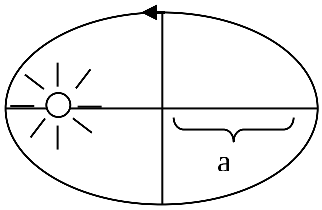


3ª Ley de Kepler: "Ley de los periodos".

"Los cuadrados de los tiempos de revolución son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse".

$$\boxed{T^2 = k \cdot a^3}$$

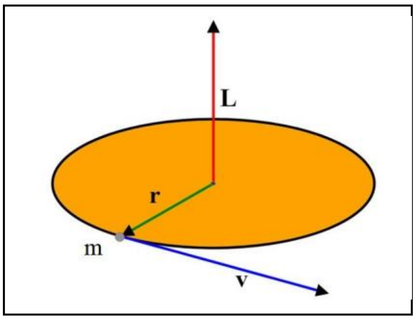
T (periodo orbital o tiempo de revolución)



La traslación de los planetas y el momento angular

Hemos visto que los planetas o satélites efectúan movimientos elípticos o casi circulares, es decir, curvilíneos.
Además recordamos que existe una magnitud que nos informa del estado de movimiento de un cuerpo en traslación. Dicha magnitud es el momento lineal o cantidad de movimiento, $\vec{p}$: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Sin embargo, esta magnitud presenta un problema práctico a la hora de tratar la traslación en movimiento curvilíneos: no permanece constante en el transcurso del movimiento, pues aunque su módulo pudiese no variar (que sí lo hace), su dirección nunca permanece constante.
Dado que la forma habitual de proceder en física es explicar los fenómenos en función de la constancia o regularidad de ciertos parámetros o magnitudes debemos encontrar una magnitud que permanezca constante en el movimiento planetario. Dicha magnitud, también vectorial, es el **momento angular**, llamado igualmente **momento cinético**, $\vec{L}$.

Momento angular

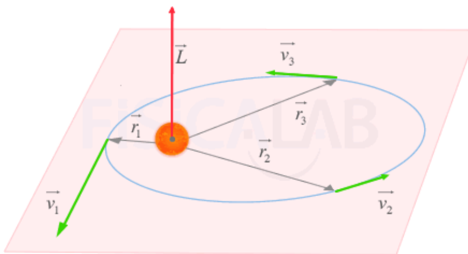


Si un cuerpo o partícula de masa m se mueve con una velocidad $\vec{v}$ y tiene una posición $\vec{r}$ con respecto a un origen determinado, podemos definir el momento angular, $\vec{L}$, de dicho punto en relación con ese origen como el producto vectorial de su posición por su momento lineal. Es decir: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$
Observamos un detalle importante en relación con esta magnitud: no es una magnitud exclusiva del cuerpo, sino que depende del origen de referencia que se escoja.
En general, en el caso de los movimientos curvilíneos alrededor de un punto, ese punto será el origen con respecto al cual definiremos el momento angular de un cuerpo.
Según todo esto:

- La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (o $\vec{v}$).
- El sentido de $\vec{L}$ puede determinarse mediante la regla de la mano derecha (o mediante la regla del tornillo),
- El módulo de $\vec{L}$ viene dado por la expresión: $L = m \cdot v \cdot r \cdot \text{sen}\alpha$. La unidad del momento angular en el S.I. es $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$.

Conservación del momento angular

Vamos a ver cómo varía el momento angular de un cuerpo celeste que orbita alrededor de otro.



Si el momento angular se define como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$, entonces la variación del momento angular respecto al tiempo será:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times (m \cdot \vec{a}) = \{\vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) = 0\} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

El producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ es cero porque el vector de posición y la fuerza gravitatoria (de naturaleza centrípeta) tienen la misma dirección, por lo que al calcular el módulo de $\vec{r} \times \vec{F}$: $\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r \cdot F \cdot \text{sen}\alpha = r \cdot F \cdot \text{sen}0^{o} = 0$

Esto supone que cuando un planeta se traslada alrededor de su estrella (o un satélite orbita alrededor de un astro) su momento angular permanece constante.

La conservación del momento angular sirve para demostrar la 2ª Ley de Kepler o Ley de las Áreas "Las áreas barridas por los radiovectores que unen el Sol y el planeta, son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas. Esto quiere decir que la velocidad aerolar es una constante".

Ejercicios:

- Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de 6,99 10^{-10} m, y su velocidad orbital es de 3,88 10^{4} ms^{-1}, siendo su distancia al Sol en el perihelio de 4,60 10^{10} m.
  a) Calcula la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.
  b) Calcula el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio

  Datos: masa de Mercurio= 3,18 10^{23} kg y masa del Sol=1,99 10^{30} kg

  Solución: a) 5,90 10^{4} m s^{-1} b) p=1,88 10^{28} kg m s^{-1} y L=8,63 10^{38} kg $m^{2}s^{-1}$

- Un satélite artificial tiene una órbita elíptica de manera que cuando está en el perigeo a 10500 km de distancia del centro de la Tierra su velocidad es de 7580 ms^{-1}. ¿Cuál será la velocidad cuando esté en el apogeo a 15000 km de la Tierra?

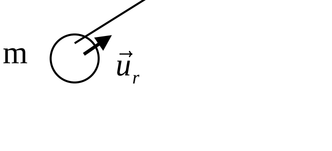
  Solución: 5306 m s^{-1}

2.2.- <u>Ley de Newton de la Gravitación Universal</u>

Newton dio una explicación dinámica del movimiento planetario y para ello se basó en las leyes de Kepler y los descubrimientos de Galileo.

La ley de la Gravitación Universal enunciada por Newton establece:

"La fuerza de atracción entre dos masas cualesquiera es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r$$

G = 6,67·10^{-11} Nm^{2}/kg^{2}

La constante de gravitación universal fue calculada por Henry Cavendish en 1798.

Propiedades de la fuerza gravitatoria:

1) La fuerza gravitatoria es universal y su alcance es infinito (la interacción gravitatoria es de largo alcance)

2) La fuerza gravitatoria es siempre atractiva.

3) La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. La interacción gravitatoria se propaga a la velocidad de la luz y no de forma instantánea como se creía.

4) Es una fuerza central porque va dirigida al centro de fuerzas.

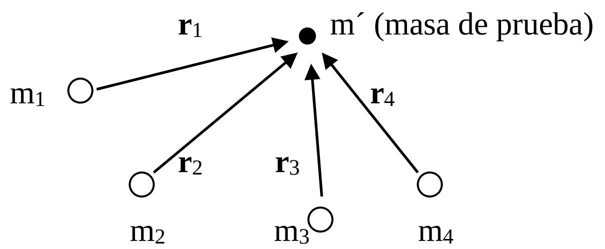
5) Es una fuerza de tipo newtoniano (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las masas).

6) La fuerza gravitatoria es el resultado de la unión de la mecánica terrestre y de la mecánica celeste. Explica la estructura de las Galaxias y el Universo.

2.3.- Fuerza de interacción entre un conjunto de masas puntuales. Principio de superposición

Hasta ahora hemos considerado la interacción entre dos masas. Cuando el número de masas que interaccionan es mayor debe calcularse la fuerza gravitatoria resultante sobre cada masa aplicando el *principio de superposición* o *principio de independencia de las fuerzas*:

"La fuerza resultante que actúa sobre un punto material es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan en ese punto material"



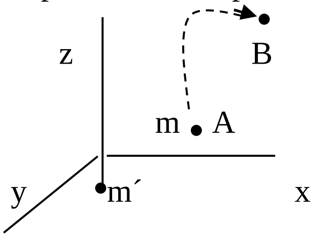
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = (-G\frac{m_1 \cdot m´}{r_1^2}\vec{u}_{r_1}) + (-G\frac{m_2 \cdot m´}{r_2^2}\vec{u}_{r_2}) + \ldots + (-G\frac{m_n \cdot m´}{r_n^2}\vec{u}_{r_n})$$

Cada fuerza actúa independientemente de las otras y la resultante corresponde a la suma vectorial de todas.

2.4.- Energía potencial gravitatoria de una masa en presencia de otra

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa por lo que cada masa, m, sobre la que actúe una fuerza gravitatoria ejercida por otra masa, m´, presentará una energía potencial gravitatoria.

Para determinar el valor de dicha energía potencial gravitatoria utilizaremos el teorema de la energía potencial. Consideraremos el trabajo que hay que realizar para desplazar m desde A hasta B. La trayectoria seguida puede ser cualquiera pues, como la fuerza es conservativa, el trabajo sólo dependerá de las posiciones inicial (A) y final (B)



$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$$

$$W_A^B = -\Delta Ep$$

Denominaremos r_A y r_B a las distancias desde m´ hasta A y B respectivamente.

$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B$$

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{m \cdot m´}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G \cdot m \cdot m´\int_{r_A}^{r_B} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{r}}{r^2} = -G \cdot m \cdot m´\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -G \cdot m \cdot m´\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) =$$

$$= -G\frac{m \cdot m´}{r_A} - (-G\frac{m \cdot m´}{r_B}) = Ep_A - Ep_B$$

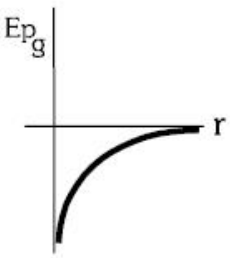
$$\boxed{\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = 1 \cdot dr \cdot \cos 0^o = dr}$$

Si consideramos el origen de energías potenciales gravitatorias en el infinito respeto a m´, y suponemos que B es un punto situado en el infinito, la energía potencial gravitatoria en B será nula y tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} r_{B \to \infty} \\ \\ Ep_B = 0 \end{array}\right\} W_A^B = W_A^\infty = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - \left(-G\frac{m \cdot m'}{r_B}\right) = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - 0 = -G\frac{m \cdot m'}{r_A} = Ep_A - \cancelto{0}{Ep_B}$$

Podemos definir la energía potencial gravitatoria de la masa m en un punto A como el trabajo que realiza el campo gravitatorio para llevar dicha masa desde A hasta el infinito y su valor se determinará con la expresión:

$$\boxed{Ep_A = -G\frac{m \cdot m'}{r_A}}$$



La fórmula Ep= mgh (g = cte) es un caso particular de la fórmula general.

<u>Expresión del Principio de conservación de la Energía mecánica de forma general cuando sólo actúan fuerzas gravitatorias.</u>

$$Em = cte = Em_A = Em_B$$

$$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B = cte$$

$$-G\frac{m\cdot m'}{r_A} + \frac{1}{2}m'v_A^2 = -G\frac{m\cdot m'}{r_B} + \frac{1}{2}m'v_B^2$$

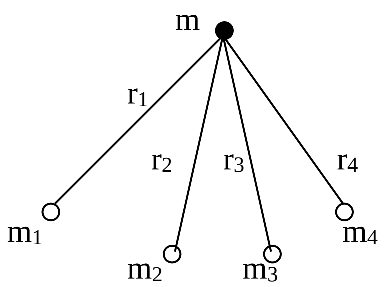
<u>Principio de superposición para la energía potencial gravitatoria</u>:

Hasta ahora hemos considerado la energía potencial gravitatoria de una masa, m, en presencia de otra masa m´.

Cuando una masa, m, está en presencia de varias masas, su energía potencial gravitatoria total corresponde a la suma de las energías potenciales gravitatorias que m tendría en presencia de cada una de las masas aisladamente.

$$Ep_{total} = \sum Ep_{partículas}$$

1.-<u>Energía potencial gravitatoria de una masa m en presencia de un sistema de masas puntuales:</u>

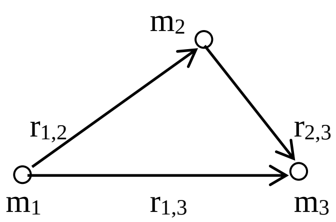


$$(Ep_{total}))_{pto\ m'} = Ep_1 + Ep_2 + Ep_3 + \ldots + Ep_n =$$

$$= -G\frac{m_1 m}{r_1} + \left(-G\frac{m_2 m}{r_2}\right) + \ldots + \left(-G\frac{m_n m}{r_n}\right)$$

2.- <u>Energía potencial gravitatoria total de un sistema de masas puntuales:</u>

Lo veremos para 3 masas (como máximo)



$$Ep_{total} = Ep_{1,2} + Ep_{2,3} + Ep_{1,3} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \left(-G\frac{m_2 m_3}{r_{2,3}}\right) + \left(-G\frac{m_1 m_3}{r_{1,3}}\right)$$

CUESTIONES Y PROBLEMAS-2

4.- Un satélite artificial gira a una distancia fija del centro de la Tierra con un periodo de 2 días. ¿Qué relación hay entre esa distancia y el radio de la orbita de otro satélite cuyo periodo es de 16 días?

5.- La siguiente tabla recoge las distancias de Júpiter a cuatro de sus satélites y sus correspondientes periodos de rotación. Comprueba que estos datos se ajustan a la tercera ley de Kepler.

	R (km)	**T**
Io	419000	1 d 18 h 28 min
Europa	667000	3 d 13 h 13 min
Ganímedes	1064000	7 d 3 h 42 min
Calisto	1 871000	16 d 16 h 32 min

6.- Determina el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre:

a) Dos personas de 75 kg separadas 20 cm.

b) La Tierra y la Luna.

DATOS: masa de la Luna $M_L = 7{,}31 \cdot 10^{22}$ kg; masa de la Tierra $M_T = 5{,}7 \cdot 10^{24}$ kg

Distancia Tierra-Luna: $3{,}8 \cdot 10^5$ km; $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

c) A la vista de los resultados, ¿en qué casos podemos decir que es apreciable la fuerza gravitatoria?, ¿cómo influye el valor de G?

7.- ¿A qué distancia de la Tierra en la línea recta que la une con la Luna tendría que situarse una masa para que las dos atracciones gravitatorias se anulen entre sí?

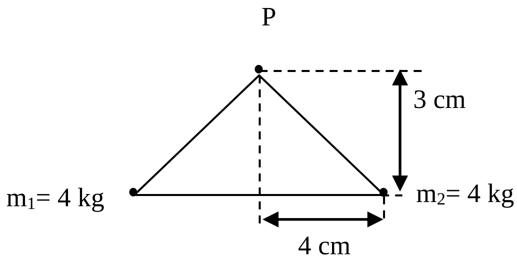
DATOS: $M_L = 7{,}31 \cdot 10^{22}$ kg; $M_T = 5{,}7 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{TL} = 3{,}8 \cdot 10^5$ km; $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

8.- Dos masas iguales, de 100 kg cada una, están situadas en los puntos (0,5) y (5,0). Determina la fuerza gravitatoria resultante sobre otra masa de 200 kg situada en el origen de coordenadas.(S.I.)

$G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

9.- Una masa de 5 kg está situada en el punto P. Determina la fuerza gravitatoria sobre dicha masa y la energía potencial gravitatoria que posee.

$G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$



10.-Una masa puntual de 8 kg está situada en el origen de coordenadas. Determina en qué punto del eje de ordenadas habría que situar una masa de 6 kg para que la fuerza gravitatoria resultante sobre otra masa de 2kg situada en el punto (0,2) fuese nula. Determina la energía potencial gravitatoria de la masa de 2kg. (Las coordenadas están medidas en metros). $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

11.- Determina el trabajo que hay que realizar sobre un cuerpo de 20 kg para trasladarlo desde el suelo hasta una altura igual al radio de la Tierra. ¿Con qué velocidad debería ser lanzado para que alcanzase dicha altura?

DATOS: masa de la Tierra $M_T = 5{,}7 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra $R_T = 6370$ km; $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$

12.- ¿Puede la energía cinética de un cuerpo ser negativa? ¿Y la energía potencial gravitatoria? Razona tu respuesta.

3. CAMPO GRAVITATORIO. INTENSIDAD Y POTENCIAL GRAVITATORIO

3.1.- Interacción, acción a distancia y concepto de campo

En una región del espacio existe un campo si es posible asignar en cada instante un valor de una magnitud dada, en todos y cada uno de los puntos de dicha región. La magnitud que caracteriza un campo depende generalmente de la posición y del tiempo. Ejemplos:

- T = T(x, y, z, t)   Campo de temperatura
- P = P(x, y, z, t)   Campo de presión
- ρ = ρ(x, y, z, t)   Campo de densidades
- F = F (x,y,z,t)   Campo de fuerzas

Los campos pueden clasificarse atendiendo a diferentes criterios:

- Si la magnitud es del mismo valor en todos los puntos, el campo es **uniforme**.
- Si el valor de la magnitud que lo define no depende del tiempo, el campo es **estacionario**.
- Según el tipo de magnitud que los define pueden ser escalares o vectoriales.

Cuando la magnitud que define el campo es una fuerza, el campo se denomina campo vectorial de fuerzas o simplemente campo de fuerzas.

Todo campo de fuerzas está creado por una partícula activa que genera en su entorno una perturbación, de modo que cualquier otra partícula de la misma naturaleza situada en un punto próximo a la partícula creadora interacciona con ella y se ve sometida a una fuerza ejercida a distancia.

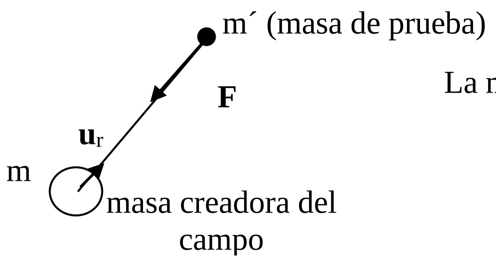
Los campos de fuerzas son **conservativos** si el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre una partícula activa que se traslada entre una posición inicial y una posición final dada no depende de la trayectoria seguida en el desplazamiento.

3.2.- Noción de campo gravitatorio. Intensidad de campo gravitatorio creado por una masa puntual

Una masa puede actuar como partícula activa y perturbar su entorno creando un campo de fuerzas gravitatorias o campo gravitatorio. Cualquier masa de prueba que sea situada en un punto del campo gravitatorio se verá sometida a una fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la masa creadora.

Definición de campo gravitatorio o intensidad de campo gravitatorio (g):

La intensidad de campo gravitatorio es una magnitud vectorial que se define en cada punto del campo como "*la fuerza por unidad de masa situada en un punto".*



La masa de prueba m' situada en un punto del campo estará sometida a la fuerza:

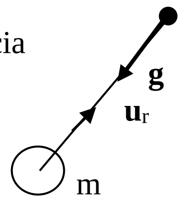
$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1 \cdot m'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

La fuerza ejercida por el campo por unidad de masa será: $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m'}$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{-G\dfrac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r}{m'} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r \qquad \boxed{\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r}$$

El vector campo gravitatorio siempre está orientado hacia la masa creadora del campo.

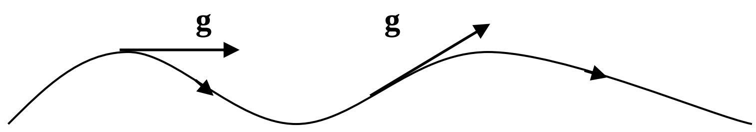
Las unidades de la magnitud g en el S.I. son N/kg.



Representación de campos de fuerzas:

Los campos de fuerzas se representan por las llamadas líneas de campo o líneas de fuerza.

Las líneas de campo o líneas de fuerza son líneas imaginarias tangentes al vector intensidad de campo en cada punto.



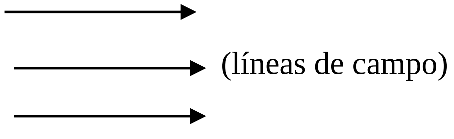
Propiedades de las líneas de campo:

1.- El sentido de las líneas de campo coincide con el sentido del vector intensidad de campo

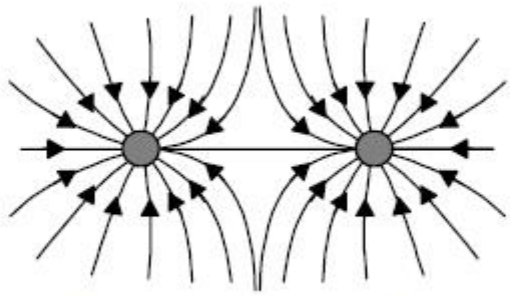
2.- Dos líneas de campo no pueden cortarse nunca (no pueden existir dos valores diferentes del campo en un mismo punto).

3.- Si el campo es uniforme (constante), las líneas de campo son paralelas. Por ejemplo:

g = cte



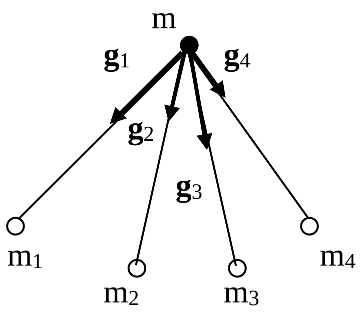
Las masas puntuales que crean campos gravitatorios son sumideros de líneas de campo porque los vectores campo gravitatorio siempre se orientan hacia las masas creadoras. En otros campos de fuerzas, como el campo electrostático, las cargas creadoras de campo podrán ser sumideros o fuentes de líneas de campo.



Líneas de campo gravitatorio generado por dos masas puntuales.

<u>Principio de superposición para la intensidad de campo gravitatorio</u>:

Si en lugar de una masa creadora el campo se debe a varias masas, se tiene que la intensidad de campo gravitatorio total corresponde a la suma de las intensidades de campo gravitatorias debidas a cada una de las masas consideradas aisladamente.



$$\mathbf{g}_{total} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots\ldots = \sum \mathbf{g}_i = \sum -G\,\frac{m_i}{r_i^2}\,\vec{u}_{r_i} \quad \text{(N/kg)}$$

3.3.- <u>Potencial gravitatorio y diferencia de potencial gravitatorio.</u>

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativas. Ya hemos estudiado que toda fuerza conservativa tiene asociado una energía potencial gravitatoria. Podemos decir que todo campo de fuerzas gravitatorias tiene asociado un campo escalar de energías potenciales.

Hemos definido la intensidad de campo gravitatorio como la fuerza por unidad de masa en un punto del campo. Podemos definir un campo escalar de energías potenciales gravitatorias por unidad de masa en cada punto del campo gravitatorio.

<u>Definición de potencial gravitatorio (V):</u>

El potencial gravitatorio se define como la energía potencial <u>por unidad de masa</u> en el punto (A) del campo, o sea, corresponde al trabajo que el campo tiene que realizar sobre cada unidad de masa para trasladarla desde A hasta el infinito:

$$V_A = \frac{W_A^{\infty}}{m'} = \frac{Ep_A}{m'}$$ Las unidades de V en el S.I. es J/kg.

Significado físico:

Que en un punto existe una intensidad de campo gravitatorio g = 5 N/kg significa que en dicho punto del campo gravitatorio actúa una fuerza de 5 N sobre cada kg de masa que penetre en él.

Que en un punto existe un potencial gravitatorio V = - 20 J/kg significa que para trasladar una masa de 1 kg desde dicho punto del campo gravitatorio hasta fuera de dicho campo (hasta el infinito), el campo realizará un trabajo de - 20 J.

Según la definición el potencial gravitatorio en un punto corresponde a:

$$V = \frac{W}{m'} = \frac{Ep}{m'} = \frac{-G\frac{m \cdot m'}{r}}{m'} = -G\frac{m}{r} \qquad \boxed{V = -G\frac{m}{r}}$$

También podemos llegar a esta expresión matemática de la siguiente forma:

$$V = \int_A^\infty \vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_A^\infty -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -G\cdot m\int_{r_A}^\infty \frac{dr}{r^2} = -G\cdot m\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^\infty = -G\cdot m\left(0-(-\frac{1}{r_A})\right) = -G\frac{m}{r_A}$$

Definición de diferencia de potencial gravitatorio:

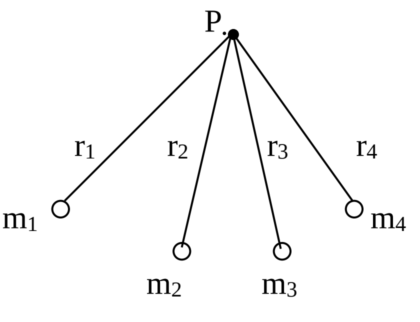
Es el trabajo necesario para que el campo lleve la unidad de masa desde un punto, A, del campo hasta otro punto, B, del campo.

$$V_A - V_B = \frac{W_A^B}{m'} \quad ; \qquad W_A^B = m'(V_A - V_B) = m'V_A - m'V_B = -\Delta Ep =$$

$$= -G\frac{m \cdot m'}{r_A} - \left(-G\frac{m \cdot m'}{r_B}\right) = -\Delta Ep$$

Potencial gravitatorio de un conjunto de masas puntuales (Superposición):

El potencial gravitatorio total de un conjunto de masas puntuales es igual a la suma algebraica de los potenciales debidas a cada una de las masas consideradas aisladamente.



$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots + V_n =$$

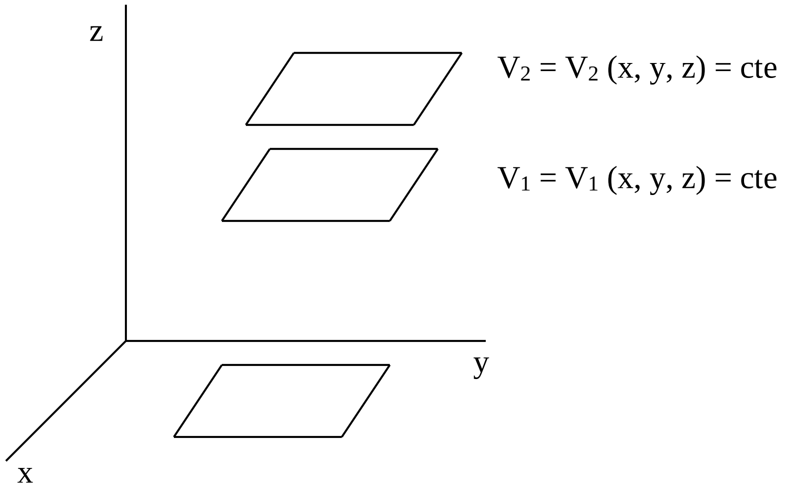
$$= -G\frac{m_1}{r_1} + \left(-G\frac{m_2}{r_2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(-G\frac{m_n}{r_n}\right) = \sum -G\frac{m_i}{r_i}$$

$$V_T = \sum V_i = \sum\left(-G\frac{m_i}{r_i}\right) \qquad \text{(J/kg)}$$

Representación del campo escalar potencial:

El campo escalar de potenciales gravitatorios se representa mediante superficies equipotenciales cada una de las cuales corresponderá al lugar geométrico de todos los puntos con el mismo potencial.

$V = V(x, y, z) \Rightarrow V = V(x, y, z) = cte$ <u>Superficie equipotencial</u>

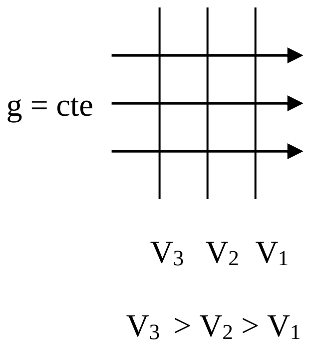


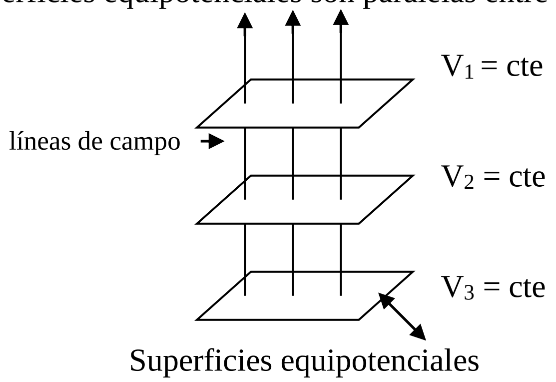
<u>Propiedades de las superficies equipotenciales:</u>

1.- Dos superficies equipotenciales no pueden cortarse nunca.

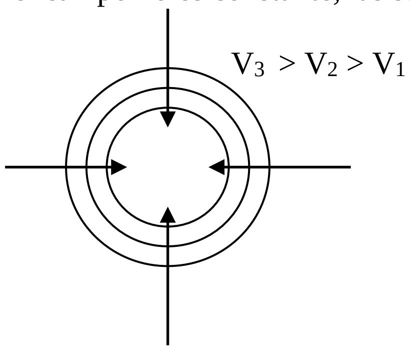
2.- Las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo:

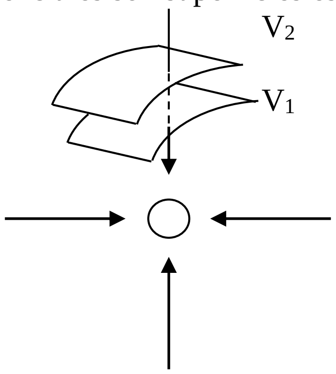
a) Cuando el campo es uniforme las superficies equipotenciales son paralelas entre sí.





b) Cuando el campo no es constante, las superficies equipotenciales son superficies esféricas.

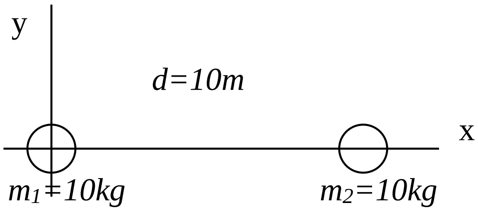




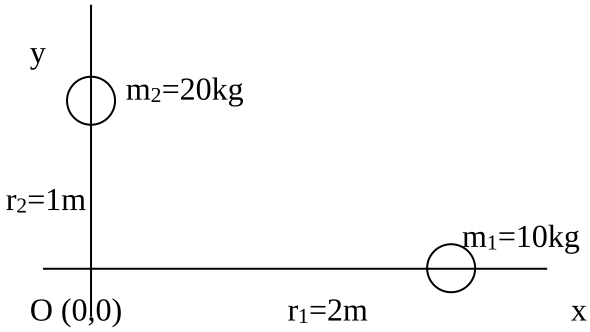
CUESTIONES Y PROBLEMAS-3

13.- ¿Es correcto afirmar que el campo gravitatorio creado por una masa puntual en reposo es un campo uniforme y estacionario?

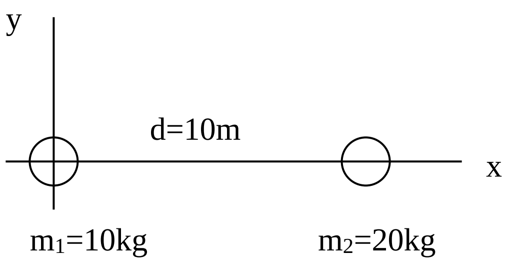
14.- Dado el sistema de la figura, calcular el campo gravitatorio y el potencial en el punto medio.



15.- Dado el siguiente sistema de masas con sus datos, calcular:
a) Campo resultante en el punto O..
b) V en el punto O(0,0) y en el punto P(2,1)
c) Trabajo necesario para llevar una masa de 2 kg (m´) desde el punto (0,0) hasta P.
d) Fuerza ejercida por el sistema sobre una masa de 5 kg situada en el punto O.



16.- Dado el siguiente sistema de masas con sus datos, calcular:
a) Campo gravitatorio y potencial en el punto medio
b)¿En qué lugar de la recta que une a las masas, el campo gravitatorio es nulo?

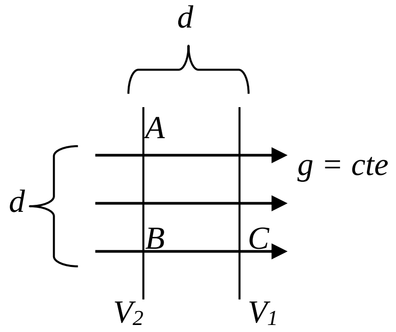


17.-Dos cuerpos, de 10 kg de masa, se encuentran en dos de los vértices de un triángulo equilátero, de 0’5 m de lado.
a) Calcule el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo.
b) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de las dos masas para traer otro cuerpo de 10 kg desde el infinito hasta el tercer vértice del triángulo.
G=6'67 10-11 N m^2 kg^{-2}

18.- En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme, de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo:

a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el punto B al C

b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



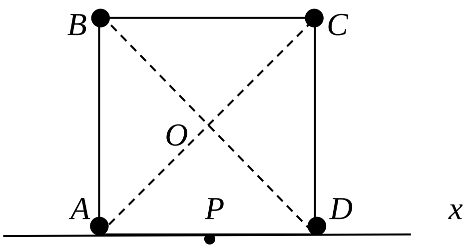
19.- Cuatro masas iguales de 10^3 kg se encuentran en los vértices de un cuadrado, de lado 1m. Calcular

a) Campo gravitatorio en el centro del cuadrado y fuerza gravitatoria que actúa en ese punto sobre una masa de prueba de 1 kg.

b) Potencial gravitatorio en el centro del cuadrado y diferencia de potencial entre el punto P (mitad del AD) y el centro del cuadrado.

c) Trabajo necesario para llevar la masa de prueba de 1 kg desde el punto P hasta el punto O (centro del cuadrado)

d) Energía potencial gravitatoria de ese sistema de masas.



20- Dado el siguiente sistema de masas con sus datos, calcular:

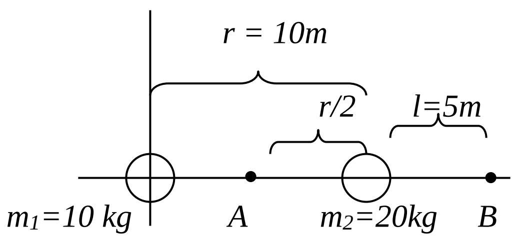
a) Campo gravitatorio en el punto A y en el punto B.

b) Potencial gravitatorio en el punto A y en el punto B.

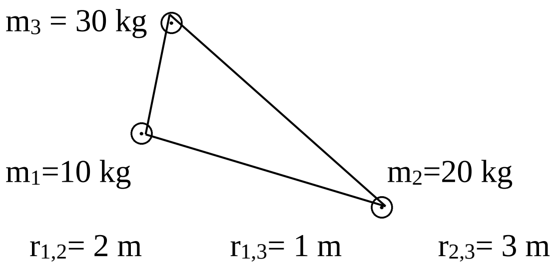
c) Trabajo necesario para llevar una masa de 5 kg desde el punto A hasta el B.

d) Fuerza ejercida por el sistema de masas sobre una masa de 5 kg situada en el punto B.

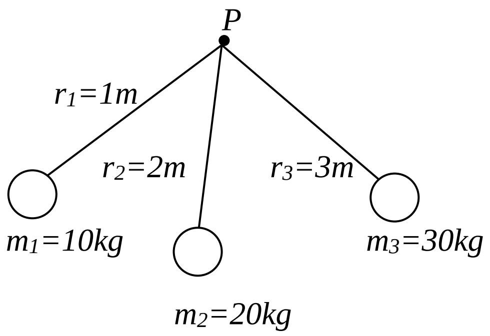
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$



21- Dado el siguiente sistema de masas con sus datos, calcular la energía potencial del sistema.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.



22- Dado el siguiente sistema de masas con sus datos calcular la energía potencial de este sistema en el punto P sobre una masa de 2 kg. ($G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

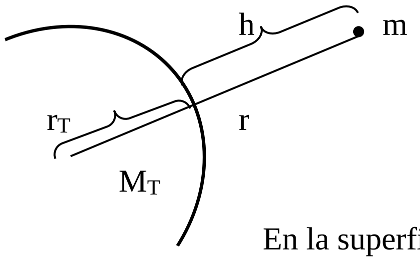


4. ESTUDIO DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

4.1.- Campo gravitatorio terrestre

Todo lo estudiado anteriormente podemos aplicarlo a la Tierra como masa creadora de un campo gravitatorio.

$$\vec{F} = -G\frac{M_T \cdot m}{r^2}\vec{u}_r \text{ ; donde } r = r_T + h$$



$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{M_T \cdot m}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r$$

En la superficie terrestre, $r = R_T \Longrightarrow \vec{g}_o = -G\frac{M_T}{R_T^{\,2}}\vec{u}_r$

Teniendo en cuenta los valores de masa y de radio de la Tierra tenemos:

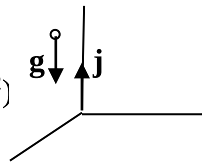
$$\left.\begin{array}{l} M_T = 5{,}97\cdot 10^{24}\ \text{kg} \\ \\ R_T = 6{,}37\cdot 10^{6}\ \text{m} \end{array}\right\} \quad g_o = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^{6})^2} = 9{,}8\frac{N}{kg} = 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

4.2.- Peso de un objeto. Variaciones de g con la altura

Definición de peso: Es la fuerza con que el campo gravitatorio de un planeta (en nuestro caso, la Tierra) atrae a los cuerpos situados en su superficie o fuera de ella.

Si estamos en la superficie

$$\mathbf{P}_o = m\cdot \mathbf{g}_o \ ; \qquad \mathbf{g}_0 = -\,9{,}8\ \mathbf{j}\ (\text{m/s}^2)$$



- Si no estamos en la superficie

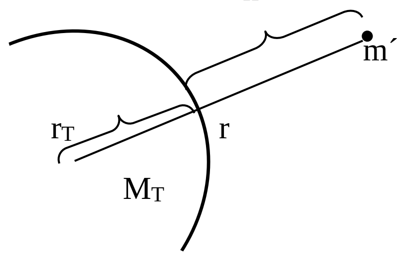
$$\vec{P} = m\cdot\vec{g} = m\cdot\left(-G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r\right) = -G\frac{M_T\cdot m}{r^2}\vec{u}_r \ ; \quad \text{donde } r = R_T + h$$

Variaciones de g:

La aceleración de la gravedad (campo gravitatorio terrestre) de la Tierra (y por analogía, cualquier planeta) varía con:

a) la altitud (altura)
b) la profundidad
c) la latitud.

a) Variación de g con la altitud (altura):



Ya hemos visto que:

En la superficie: $g_0 = G\dfrac{M_T}{{R_T}^2}$ (g_0 = 9,8 m/s^2)

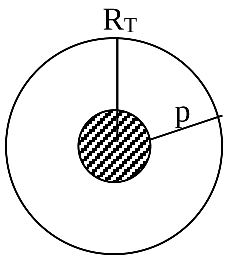
A la altura h: $g_h = G\dfrac{M_T}{r^2} = G\dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$

Para establecer la relación entre g_h y g_0: dividimos miembro a miembro

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{G\dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \qquad g_h = g_0\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Obsérvese que si h no es muy elevada, $R_T \approx R_T + h$, con lo que $g_h \approx g_0$.

b) Variación de g con la profundidad:



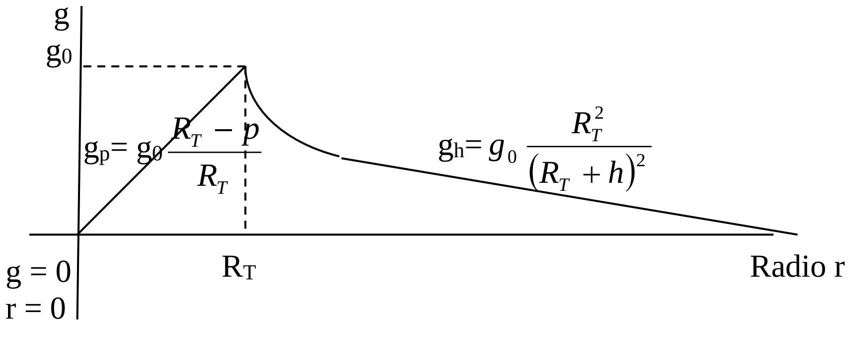
A una profundidad p, el valor de r es igual a R_T – p, y el valor de m ya no es el de toda la masa de la Tierra, sino el del volumen determinado por R_T – p, entonces g_p toma la expresión:

$$g_p = G\frac{m}{(R_T - p)^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi\rho\cdot(R_T - p)^3}{(R_T - p)^2} = G\frac{4}{3}\pi\rho\cdot(R_T - p)$$

Si ponemos en la expresión de g_0 el valor de la masa de la Tierra en función de su densidad: $g_0 = G\dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho\cdot R_T^3}{R_T^2}$, nos queda $g_0 = G\dfrac{4}{3}\pi\rho\cdot R_T$ y dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{g_p}{g_o} = \frac{G\frac{4}{3}\pi\rho(R_T - p)}{G\frac{4}{3}\pi\rho R_T}$$ queda: $$\frac{g_p}{g_0} = \frac{(R_T - p)}{R_T}$$

(Todo esto suponiendo que la densidad de la Tierra es constante)

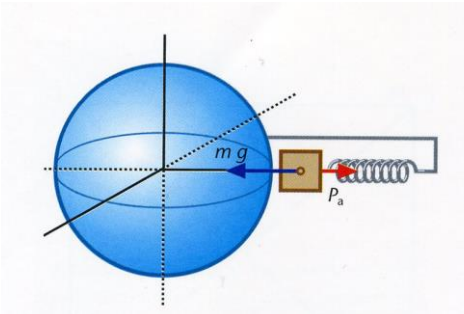


$R_T \Rightarrow g_{max} = g_0$

c) variación de g con la latitud:

El hecho de que la Tierra no sea exactamente esférica y la rotación terrestre alrededor de su propio eje van a influir en el cálculo de la gravedad.

Vamos a considerar un cuerpo de masa “m” situado en la superficie de la Tierra, como se indica en la figura. La fuerza de atracción gravitatoria “m g” va dirigida hacia el centro del planeta. Pero como la Tierra gira alrededor de su eje, el objeto describe una trayectoria circular cuyo centro está en el eje de la Tierra. Dado que se trata de un movimiento circular uniforme (supuesta constante la velocidad de rotación de la Tierra), la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es una fuerza centrípeta cuyo valor, según la Segunda Ley de Newton, es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración centrípeta “m a_c”. Puede verse el caso sencillo de un cuerpo situado en el ecuador. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso “m g” y la fuerza del muelle del dinamómetro con el que se está midiendo su peso, que se llama Pa ya que es el valor del peso aparente. Aplicando la Segunda Ley de Newton, se tiene que:



$$m\,g - Pa = m\,a_c \qquad \text{de donde} \qquad Pa = m\,g - m\,a_c$$

Es decir, el peso aparente es menor que la fuerza de atracción gravitatoria, que se ha definido como el peso (real) de un cuerpo. En cualquier otro lugar, fuera del ecuador, el razonamiento es análogo pero la geometría del problema y el cálculo subsiguiente se complican. No obstante, como resultado de dichos cálculos se obtiene que **el peso aparente de un cuerpo depende de la latitud**. En particular, en los polos, el peso aparente y el real coinciden ya que tales puntos, por estar en el eje de rotación del planeta, no se mueven cuando éste gira.

$$\left.\text{Polos}\begin{cases} a_n = 0 \text{ (sur)} \\ a_n = 0 \text{ (norte)} \end{cases}\right\} \quad g_0 = g \Longrightarrow g_{máx}$$

$$\text{Ecuador} \qquad g_0 > g \Longrightarrow g_{mín}$$

4.3.- **Energía potencial gravitatoria terrestre:**

El campo gravitatorio terrestre es un campo conservativo en el que podemos definir una energía potencial gravitatoria para una masa m situada en cualquier punto, A, del campo. Dicha energía potencial gravitatoria corresponderá al trabajo que el campo realiza para trasladar la masa m desde A hasta el infinito:

$$Ep_{gA} = -G\frac{M_T m}{r_A} = W_A^{\infty} \qquad (r_A = R_T + h)$$

Análogamente podemos definir el potencial gravitatorio terrestre en un punto, A, del campo como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa en dicho punto:

$$V_{gA} = -G\frac{M_T}{r_A}$$

Expresión general de la energía potencial gravitatoria respecto a la superficie terrestre:

Si desplazamos una masa m desde un punto del campo, A, a otro punto del campo, B, la fuerza gravitatoria realiza un trabajo correspondiente a:

$$W = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B = -G\frac{M_T m}{r_A} - \left(-G\frac{M_T m}{r_B}\right) = = G\frac{M_T m}{r_B} - G\frac{M_T m}{r_A}$$

Si consideramos el punto B sobre la superficie terrestre y el punto A a una altura, h, sobre la superficie terrestre, tendremos:

$r_A = R_T + h$ y $r_B = R_T$, con lo que la expresión anterior se convierte en:

$$W = -\Delta Ep = G\frac{M_T m}{r_B} - G\frac{M_T m}{r_A} = G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_T m}{R_T + h} = GM_T m\left[\frac{R_T + h - R_T}{R_T(R_T + h)}\right] =$$
$$= GM_T m\ \frac{h}{R_T(R_T + h)} = GM_T m\ \frac{h}{R^2{}_T + h\cdot R_T}$$

Si la altura h no es muy elevada, $R_T^2 + h\cdot R_T \approx R_T^2$, con lo que la expresión anterior se convierte en:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = GM_T m\ \frac{h}{R^2{}_T} = m\cdot h.g_0$$

Con esto demostramos que cuando una masa se encuentra a una altura, h, no muy grande respecto al valor del radio de la Tierra, y se desplaza hasta un punto de la superficie terrestre bajo la acción de la fuerza gravitatoria, dicha fuerza realiza un trabajo que equivaldrá a la energía potencial gravitatoria de la masa a la altura h respecto a la superficie terrestre (se considera en este caso el origen de energía potenciales gravitatorias en la superficie terrestre)

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = m\cdot h_A\cdot g_0 - m\cdot h_B\cdot g_0 = m\cdot h\cdot g_0 - m\cdot 0\cdot g_0$$

$$\boxed{Ep_A = m\cdot h\cdot g_0}$$

4.4.- Satélites: velocidad orbital y velocidad de escape (velocidad de fuga).

a) Velocidad orbital de un satélite (1ª velocidad cósmica)

Consideraremos un satélite que orbita alrededor de la Tierra. Entre todas las órbitas posibles, la más sencilla es la órbita circular y esta será la que consideraremos.

Supondremos un satélite con movimiento circular uniforme, siendo v el módulo de su velocidad y r el radio de la órbita, medido desde el centro de la Tierra.

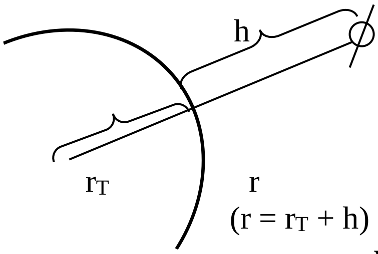
La única fuerza que actúa sobre el satélite en estas condiciones es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra. Dicha fuerza actuará como fuerza centrípeta:

$$F_{T,s} = F_{ctp} \ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{T,s} = G\dfrac{m_T m'}{r^2} \\ \\ F_{centrípeta} = m \cdot a_n = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\}$$

Igualando resulta:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$



Puede observarse que la aceleración centrípeta corresponderá al valor del campo gravitatorio en el punto considerado: $g = a_n$

Despejando v tenemos: $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{r}}}$

Esta es la velocidad a la que el satélite debe girar alrededor de la Tierra para describir una órbita circular estable (velocidad orbital).

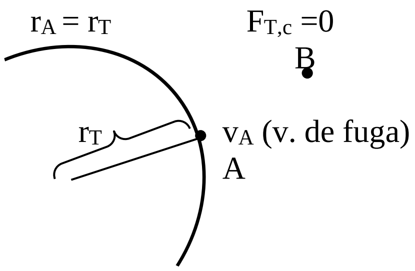
El tiempo que tarda un satélite en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra es el denominado periodo de rotación, T. En una órbita circular uniforme se cumplirá:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}}$$

Observamos que este resultado está de acuerdo con la 3ª ley de Kepler: $\boxed{T^2 = k \cdot a^3}$

b) <u>Velocidad de fuga o velocidad de escape (2ª velocidad cósmica):</u>

Es la velocidad mínima necesaria que se tiene que dar a un cuerpo para que éste se escape del campo gravitatorio de un planeta (en nuestro caso la Tierra).



En el punto A de la superficie terrestre el cuerpo posee energía potencial gravitatoria y energía cinética, que le será comunicada al lanzarlo con la velocidad que queremos determinar.

El cuerpo debe alcanzar el punto B en el que quede fuera de la acción del campo gravitatorio terrestre ($F_{T,c} = 0$). En dicho punto el cuerpo no tendrá energía potencial gravitatoria y como mínimo debe llegar a él con velocidad nula. Por lo tanto en B el cuerpo no tendrá energía mecánica.

Para determinar la velocidad de escape utilizaremos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Em_A = Em_B = cte$$

$$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$$

$$-G\frac{M_T \cdot m}{r_A} + \frac{1}{2}mv_A^2 = \underbrace{-G\frac{M_T \cdot m}{r_B}}_{\substack{0 \\ (r_B=\infty)}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{\substack{0 \\ (v_B=0)}}$$

Reordenando términos llegamos a:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = G\frac{M_T \cdot m}{r_A} \quad ; \quad v_A^2 = 2G\frac{M_T}{R_T} \quad ; \quad v_A = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$$

Teniendo en cuenta los valores de M_T, R_T y G, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} M_T = 6\cdot10^{24}\text{ kg} \\ \\ R_T = r_A \approx 6375\text{ km} \\ \\ G = 6{,}67\cdot10^{-11}\text{ (S.I.)} \end{array}\right\} v_A = \sqrt{2G\frac{M_T}{r_T}} = \sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{6\cdot10^{24}}{6{,}375\cdot10^{6}}} = 11205{,}04\text{ m/s}$$

Obsérvese que según lo determinado, cualquier cuerpo impulsado desde la superficie terrestre con una velocidad de 11178,10 m/s (≈11,18 km/s) escapará del campo gravitatorio terrestre, **independientemente de la masa de dicho cuerpo**.

c) Energía mínima necesaria para poner un satélite en órbita, lanzado desde la superficie de la Tierra.

Para poner un satélite en órbita:

1º.- Hay que subir el satélite hasta la órbita
2º.- Hay que darle al satélite una velocidad que iguale a la velocidad orbital correspondiente.

Para poner el satélite en órbita se debe realizar el trabajo necesario para suministrar el incremento de energía mecánica que experimentará el satélite al pasar desde la superficie terrestre (A) hasta un punto de la órbita (B), con la velocidad adecuada (velocidad orbital)

$$(Em)_B = (Em)_A \quad ; \quad (Ep)_B + (Ec)_B = (Ep)_A + (Ec)_A \quad ; \quad (Ec)_A = (Ep)_B + (Ec)_B - (Ep)_A$$

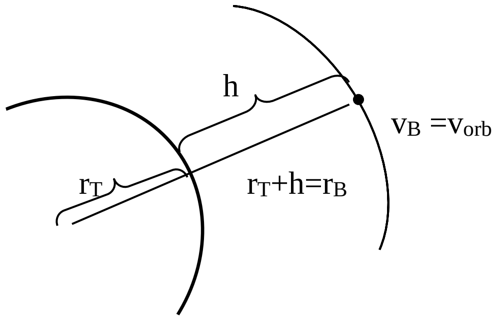
$$W_{motor} = (Ec)_A = (Ep)_B + (Ec)_B - (Ep)_A$$

$$W_{motor} = -G\frac{M_T \cdot m}{r_B} + \frac{1}{2}mv_B^2 - \left(-G\frac{M_T \cdot m}{r_A}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{r_B} - \left(-G\frac{M_T \cdot m}{r_A}\right) =$$

$$v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_T}{r_B}}$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h} - \left(-G\frac{M_T \cdot m}{R_T}\right) = G\frac{M_T \cdot m}{R_T} - \frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = G\,M_T\,m \cdot \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + h)}\right]$$

d) <u>Cálculo de la energía total en una órbita (energía mecánica de la órbita o energía de enlace) de un satélite o un cuerpo.</u>



$E_T = E_{enlace} = Em = Ep + Ec =$

$$= -G\frac{m_T \cdot m'}{r_B} + \frac{1}{2}m' v_B^2$$

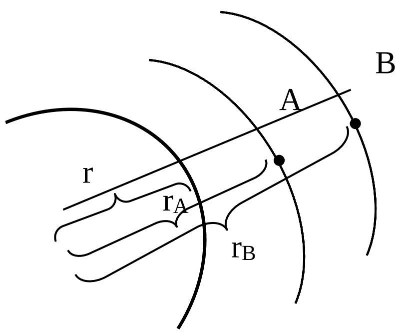
$$v_B = v_{orb} = \sqrt{G\frac{m_T}{r_B}}$$

$$Em = E_T = -G\frac{m_T \cdot m'}{r} + \frac{1}{2}m' v^2 = -G\frac{m_T \cdot m'}{r} + \frac{1}{2}m' G\frac{m_T}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r}$$

e) <u>Energía necesaria para pasar un satélite de una órbita a otra.</u>

Para pasar el satélite de una órbita a otra se debe realizar el trabajo necesario para suministrar el incremento de energía mecánica que experimentará el satélite al pasar desde un punto (A) de la primera hasta un punto de la segunda órbita (B).

$W_{motor} = \Delta Em = Em_B - Em_A$



Si pasamos de una órbita grande a otra pequeña pierde energía y si va de una pequeña a otra grande se le suministra.

Si $E>0 \Longrightarrow$ de órbita pequeña a órbita grande

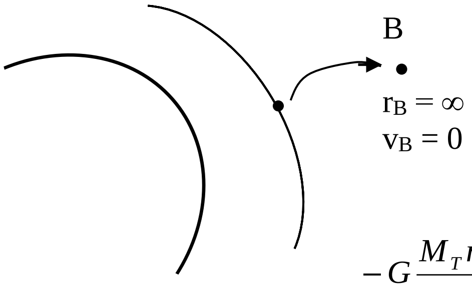
Si $E<0 \Longrightarrow$ de órbita grande a órbita pequeña.

$$W_{motor} = \Delta Em = -\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r_B} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{m_T \cdot m'}{r_A}\right) \quad (J)$$

f) <u>Velocidad de fuga desde una estación orbital utilizada como plataforma de lanzamiento.</u>

Para determinar la velocidad de escape desde una órbita, utilizaremos el principio de conservación de la energía mecánica. Debe determinarse la velocidad mínima con la que debe impulsarse un cuerpo desde la órbita inicial para llegar a un punto B fuera del campo.

$$Em_A = Em_B = cte$$



0 ($r_B=\infty$)

$$-G\frac{M_T m}{r_A}+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_F^2=\cancel{-G\frac{M_T m}{r_B}}+\frac{1}{2}\cancel{mv_B^2}=0$$

0 ($v_B=0$)

$r_A = r_T+h \qquad v_A=v_{orbital}$

$$-\frac{1}{2}G\frac{M_T\cdot m}{r_T+h}+\frac{1}{2}mv_F^2=0 \quad ; \quad \frac{1}{2}mv_F^2=\frac{1}{2}G\frac{M_T\cdot m}{r_T+h}$$

$$\boxed{v_F=\sqrt{G\frac{M_T}{r_T+h}}}$$

4.5 <u>Notas complementarias</u>

a) **<u>Órbita geoestacionaria</u>**

Un satélite se llama geoestacionario cuando se encuentra siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Su período de revolución coincide con el de la Tierra, T=24 h. Las órbitas geoestacionarias generalmente son órbitas ecuatoriales.

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} \quad ; \quad \text{despejando r:}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}}$$

Teniendo en cuenta que el campo gravitatorio terrestre en la superficie es: $g_0=G\frac{M_T}{R_T^2}$

Podemos despejar $G\cdot M_T$: $\boxed{G\cdot M_T=g_0\cdot R_T^2}$

Sustituyendo en la expresión del radio de una órbita geoestacionaria, tenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot {R_T}^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} \; ;$$

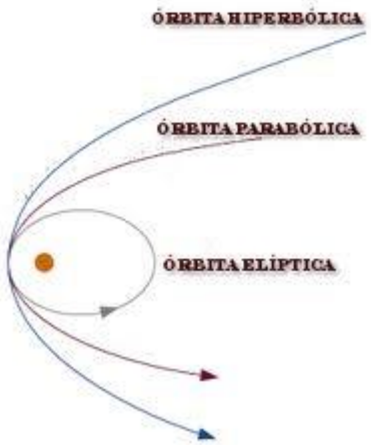
como $r = R_T + h$, podemos obtener la altura de las órbitas geoestacionarias:

$$\boxed{h = 35{,}865\ km}$$

b) **<u>Tipos de órbitas según la E_{Total} o Em de un cuerpo.</u>**

$$E_{Total} = Em = -\frac{1}{2} G \frac{m_T \cdot m'}{r} = -\frac{1}{2} m' g_0 \frac{r_T^2}{r_T + h}$$

$$r = r_T + h$$



a) $E_{Total} < 0$ El satélite se mantiene en la órbita:

a-1) $E_{Total} = -\frac{1}{2} G \frac{m_T \cdot m'}{r}$ la trayectoria es una circunsferencia

a-2) $-\frac{1}{2} G \frac{m_T \cdot m'}{r} < E_{Total} < 0$ la trayectoria es una elipse exterior de la órbita circular. El origen de las fuerzas está en uno de sus focos.

a-3) $E_{Total} \leq -\frac{1}{2} G \frac{m_T \cdot m'}{r}$ la órbita es una elipse interior con el centro de las fuerzas en el otro foco.

b) $E_{Total} = 0$ la órbita es una parábola (velocidad de fuga)

c) $E_{Total} > 0$ la órbita es una hipérbola, al superar la energía total el satélite escapa del campo gravitatorio y todavía le sobra energía.

Los satélites permanecen en sus órbitas en el primer caso (a); el segundo caso es para la velocidad de fuga, en el que en el infinito, la velocidad del cuerpo es 0, (b); el tercer caso es también para una velocidad de fuga, pero la velocidad en el infinito no es cero, sino que el cuerpo lleva una velocidad extra o supletoria (c).

CUESTIONES Y PROBLEMAS-4

23.- Un satélite se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita estable a una altura de 100 km sobre el Ecuador. Calcular la velocidad orbital del satélite a esa altura. Datos: $R_T = 6375$ *km;* $M_T = 5{,}7 \cdot 10^{24}$ *kg;* $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

24.- Calcular la velocidad de escape del planeta Tierra de una nave lanzada desde la superficie de la Tierra. Dato: $R_T = 6375$ *km.*

25.- Estamos en una estación orbital a una altura h=500 km de la superficie de la Tierra y nos piden que calculemos la velocidad de fuga desde esa estación orbital.
Dato: $R_T = 6375$ *km..*

26.- Un satélite (El Galíleo-V) se encuentra en una órbita estable por encima del Ecuador a una altura de 500 km. La masa del satélite es de 10^4 *kg. Calcular la energía total (energía de enlace) del satélite en su órbita. Dato:*$R_T = 6375$ *km.*

27.- La nave espacial lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determinar:
a) Velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.
b) Velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 ; $m_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ *kg ;* $r_L = 1740$ *km.*

28.- Un cuerpo pesa en la superficie terrestre 700 N.
a) ¿A qué altura pesará la mitad?
b) Calcular el valor del campo gravitatorio a esa altura.
Dato: $R_T = 6375$ *km.*

29.- Calcular la altura máxima que alcanzará un proyectil lanzado verticalmente desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 8 km/s, suponiendo nula la resistencia del aire.
Datos: $R_T = 6375$ *km.*

30.- El planeta Júpiter tiene una masa que es 318 veces la masa de la Tierra y su diámetro es 11 veces el diámetro de la Tierra. Calcular:
a) El peso en el planeta Júpiter de un astronauta que en la Tierra pesa 700 N.
b) ¿Cuál es la masa del astronauta en Júpiter?
c) Calcúlese la relación entre las energías potenciales de dicho astronauta en la superficie de Júpiter y en la superficie de la Tierra.

31.- Cuando se envía un satélite a la Luna se le sitúa en una órbita que corta a la recta que une los centros de la Tierra y la Luna por el punto en que las dos fuerzas que sufre el satélite por la atracción de ambos astros son iguales. Cuando el satélite se encuentra en este punto, calcular:

a) La distancia a la que está del centro de la Tierra.
b) La relación entre las energías potenciales del satélite debidas a la Tierra y a la Luna.
Datos: $m_T=81m_L$ *; Distancia entre centros* $d= 384\cdot10^6$ *m.*

32.- Un satélite de 250 kg de masa está en órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre su superficie de 500 km. Calcular:
a) Su velocidad y su período de revolución.
b) Energía potencial y energía cinética del satélite.
Dato: $R_T = 6375$ *km.*

33.- El satélite Io de Júpiter gira alrededor del planeta en una órbita que admitimos que es una circunferencia con centro en Júpiter. Dados los siguientes datos de Io:

$$T = 1{,}53\cdot10^5 \text{ s (período de revolución)}$$
$$r = 4{,}22\cdot10^8 \text{ m (radio de la órbita)}$$

y la constante de gravitación universal $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$*, se puede deducir que la masa de Júpiter expresada en kg es:*
a) $1{,}90\cdot10^7$ *kg   b)* $1{,}90\cdot10^{17}$ *kg   c)* $1{,}90\cdot10^{27}$ *kg   d)* $1{,}90\cdot10^{37}$ *kg.*

34- Calcula a qué altura sobre el Ecuador debe situarse un satélite para que esté en una órbita geoestacionaria. (T=24h) R_T*=6375 km.*

EXÁMENES DE SELECTIVIDAD EN ANDALUCÍA

2004

1. Un bloque de 0,2 kg está apoyado sobre el extremo superior de un resorte vertical, de constante 500 Nm^{-1}, comprimido 20 cm. Al liberar el resorte, el bloque sale lanzado hacia arriba.

a) Explique las transformaciones energéticas a lo largo de la trayectoria del bloque y calcule la altura máxima que alcanza.

b) ¿Qué altura alcanzaría el bloque si la experiencia se realizara en la superficie de la Luna?

$g_T = 10\ m\ s^{-2}$; $M_T = 10^2\ M_L$; $R_T = 4\ R_L$

SOL: a) h= 5 m **b)** h_L=31,25 m

2. a) Determine la densidad media de la Tierra.

b)¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre se reduce a la tercera parte?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $R_T = 6370$ km ; $g = 10\ m\ s^{-2}$

SOL: a) 5619 kg m^3 ; h= 4663 Km

3. a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m' depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué?

b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.

SOL: a) aumenta

2005

4. Un bloque de 1 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 200 N m^{-1}, comprimiéndolo.

a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 40 cm?

b) Explique cualitativamente cómo variarían las energías cinética y potencial elástica del sistema bloque - muelle, en presencia de rozamiento.

$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOL: a) v=5,66 m/s

5. **a)** Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcule el valor de la fuerza resultante. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es 3,84·108 m.

b) ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el punto, entre la Tierra y la Luna, en el que el campo gravitatorio es nulo?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg

SOL: a) F = 10,69 N ; **b)** x = 3,49 10^8 m

2006

6.- La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra, su diámetro 10 veces mayor que el terrestre y su distancia media al Sol 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol.

a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg.

b) Calcule el tiempo que Júpiter tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres.

$g = 10\ m\ s^{-2}$; radio orbital terrestre = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

SOL: a) P = 2250 N ; **b)** T_J = 11,18 años

7.- Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente.
b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.
SOL: a) Verdadera ; **b)** Falsa

2007
8. Un satélite artificial de 500 kg orbita alrededor de la Luna a una altura de 120 km sobre su superficie y tarda 2 horas en dar una vuelta completa.
a) Calcule la masa de la Luna, razonando el procedimiento seguido.
b) Determine la diferencia de energía potencial del satélite en órbita respecto de la que tendría en la superficie lunar.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; R_{Luna} = 1740 km
SOL: a) M_L= 7,4 10 ^{22} Kg **b)** ΔE_P = 9 10 ^{7} J

2010
9. a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para una órbita circular.

10. Dos masas puntuales m = 10 kg y m' = 5 kg están situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente.
a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A (0,0) m y en el punto B (4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos.
b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

SOL: a) $\vec{g}_A = 2{,}08 \cdot 10^{-11}\vec{i} + 7{,}41 \cdot 10^{-11}\vec{j}\ \dfrac{N}{Kg}$ **;** $\vec{g}_B = -4{,}17 \cdot 10^{-11}\vec{i} - 3{,}7 \cdot 10^{-11}\vec{j}\ \dfrac{N}{Kg}$

b) W = 1,35 10^{-11} J

2017
Tres masas puntuales m_1(10 kg), m_2(20 kg) y m_3(30 kg) están situadas en los puntos (-2,0), (3,-3) y (5,5), respectivamente. Las coordenadas están expresadas en metros.
a) Dibuje y calcule la intensidad de campo gravitatorio en el punto O(0,0).
b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 3 kg desde el punto O(0,0) hasta el punto B(3,0).
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
SOL: a) $\mathbf{g_o}$= - 8,6048 10^{-11} **i** - 2,4106 10^{-11} **j** N kg^{-1} **b)** W_{ext}= - 5,619 10^{-11} J

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL TEMA 1

1- a) 16 J b) 16 J c) 3,46 m s^{-1}
2- consultar la teoría
3- ΔEp = - 8,7 J ; ΔEc = 8,7 J
4- 0,25
5- $T_i^2 \, r_i^{-3} = 4,2 \; 10^{-17}$ $días^2$ km^{-3}
6- a) 9,38 10^{-6} N b) 1,92 10^{20} N
7- 341344350 m
8- 5,34 10^{-8} **i** +5,34 10^{-8} **j** N
9- -6,40 10^{-7} **j** N ; -5,34 10^{-8} J
10- (0 , 3,73) m ; -9,96 10^{-10} J
11- 5,97 10^{8} J ; 7725,3 m s^{-1}
12- consultar la teoría
13- uniforme: no ; estacionario: sí
14- **g** = 0 ; V = -2,67 10^{-10} J kg^{-1}
15- a) 1,67 10^{-10} **i** + 1,33 10^{-9} **j** N kg^{-1} b) V(0,0)= -1,67 10^{-9} J kg^{-1} ; V(2,1)= -1,33 10^{-9} J kg^{-1}
c) W_{ext} =6,67 10^{-10} J d) 8,34 10^{-10} **i** + 6,67 10^{-9} **j** N
16- a) 2,67 10^{-11} **i** N kg^{-1} ; -4 10^{-10} J kg^{-1} b) a 4.14 m de m_1
17- a) **g**=-4,62 10^{-9} **j** Nkg^{-1} ; b) W=2,67 10^{-8} J
18- consultar la teoría
19- a) **g** = 0 N kg^{-1} ; **F** = 0 N b) V_0 = -3,77 10^{-7} J kg^{-1} ; V_P-V_0 = -9 10^{-9} J kg^{-1} c) W_{ext} = -9 10^{-9} J
d) -3,61 10^{-4} J
20- a) **g** $_A$= 2,67 10^{-11} **i** N kg^{-1} ; **g** $_B$= -5,63 10^{-11} **i** N kg^{-1} b) V_A= -4,00 10^{-10} J kg^{-1} ; V_B= -3,11 10^{-10} J kg^{-1} c) $(W_A{}^B)_{F\,EXT}$ = 4,445 10^{-10} J d) -2,82 10^{-10} **i** N
21- -4,002 10^{-8} J
22- -4,002 10^{-9} J
23- 7662,7 m s^{-1}
24- 11178,1 m s^{-1}
25- 10764,0 m s^{-1}
26- -2,897 10^{11} J
27- a) 1633,4 m s^{-1} ; 1,97 horas b) 2310 m s^{-1}
28- a) 2640611,5 m b) 4,9 N kg^{-1}
29- 6694 km
30- a) 1839,7 N b) 71,43 kg c) 28,91
31- a) 3,456 10 ^{8} m b) 0,11
32- a) 7611,3 m s^{-1} ; 1,58 horas b) E_P = -1,45 10^{10} J ; E_C= 0,72 10^{10} J
33- respuesta: c
34- 35854707 m

DEFINICIÓN DE TRABAJO Y ESTUDIO ORBITAL EN CAMPOS GRAVITATORIOS

Nº	LEY / CONCEPTO	FÓRMULA	SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS	UTILIDAD
1	Definición de trabajo realizado por una fuerza	$W_A{}^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = = \int_A^B F\cdot\cos\alpha\cdot dr$	W_F : trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ $\vec{F}$: Fuerza que realiza el trabajo $d\vec{r}$: Diferencial de desplazamiento $\cos\alpha$: coseno del ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento	Esta expresión es válida sea la fuerza constante o no lo sea.
2	3ª Ley de Kepler	$T^2 = k\,a^3$	T: Periodo de revolución (s) k: Constante de proporcionalidad ($s^2\,m^{-3}$) a: Semieje mayor de la elipse (m)	Sirve para relacionar el tiempo que tarda un planeta alrededor del Sol y el radio de giro. La constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas.
3	Velocidad orbital	$v_o = \sqrt{G\frac{M}{r}}$	v_o: velocidad orbital ($m\,s^{-1}$) G: constante de Gravitación Universal ($N\,m^2kg^{-2}$) M :masa del cuerpo del que se gira (kg) r : radio de giro (distancia entre el centro de los dos cuerpos) (m)	Nos permite calcular la velocidad de un cuerpo que orbita alrededor de otro cuerpo de masa M
4	Periodo orbital	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$	T : Periodo de revolución G: constante de Gravitación Universal ($N\,m^2kg^{-2}$) M :masa del cuerpo del que se gira (kg) r : radio de giro (distancia entre el centro de los dos cuerpos) (m)	De la definición de periodo orbital y la velocidad orbital obtenemos esta expresión que coincide con la 3ª Ley de Kepler.
5	Velocidad de fuga	$v_f = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$	v_f : velocidad de fuga ($m\,s^{-1}$) G: constante de Gravitación Universal ($N\,m^2kg^{-2}$) M :masa del cuerpo del que se gira (kg) R: radio del astro del que se quiere calcular la velocidad de fuga (m)	Permite calcular la velocidad mínima que tiene que tener un cuerpo para poder abandonar el campo gravitatorio creado por el cuerpo de masa M.
6	Calculo del producto de G y M_T	$GM_T = g_o R_T{}^2$	G: constante de Gravitación Universal ($N\,m^2kg^{-2}$) M_T: masa de la Tierra (kg) R_T: radio de la Tierra g_o: Intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie del planta (9,8 $N\,kg^{-1}$)	Es útil en algunos problemas que no se suministran los valores de G y de M_T pero sí nos dan el valor de R_T.
7	Energía mecánica de un cuerpo que orbita	$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{m\cdot m'}{r}$	E_m:Energía mecánica (Ec+Ep) (J) G: constante de Gravitación Universal ($N\,m^2kg^{-2}$) m y m': masa del cuerpo que orbita y del cuerpo sobre el que se orbita (kg) r : distancia de separación entre los centros de los dos cuerpos (m)	La expresión sirve para calcular la E_m de un cuerpo que orbita con trayectoria circular. Si la E_m fuese igual, o mayor, a cero el cuerpo escaparía del campo gravitatorio.

MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DEL CAMPO GRAVITATORIO

<u>*Nombre de la magnitud y fórmula:*</u>
Fuerza gravitatoria

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

<u>*Significado de los símbolos de la fórmula y unidad:*</u>
$\vec{F}$: Fuerza gravitatoria entre m y m´ (N);
G: Constante de Gravitación Universal (Nm^2 kg^{-2});
m y m´: Masas que se atraen (kg);
r: Distancia entre las dos masas.
$\vec{u}_r$: Vector unitario en la dirección entre las dos masas y sentido desde la masa que ejerce la fuerza y la masa que sufre la fuerza.

<u>*Definición de la magnitud:*</u>
$\vec{F}$ es la fuerza con la que dos masas se atraen entre sí.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'}$$

$$\vec{F} = m' \cdot \vec{g}$$

<u>*Nombre de la magnitud y fórmula::*</u>
Intensidad del campo gravitatorio

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

<u>*Significado de los símbolos de la fórmula y unidad:*</u>
$\vec{g}$: Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa m a una distancia r (N/kg).
G: Constante de Gravitación Universal (Nm^2 kg^{-2});
r: Distancia desde la masa hasta el punto donde se quiere calcular $\vec{g}$. Se mide en metros.
$\vec{u}_r$: Vector unitario en la dirección entre la masa y el punto donde se quiere conocer el valor de $\vec{g}$ y sentido desde la masa hasta el punto en cuestión.

<u>*Definición de la magnitud:*</u>
$\vec{g}$ es la fuerza gravitatoria ejercida por unidad de masa.

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{d\vec{r}}$$

$$E_p = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{g} = -\frac{dV}{d\vec{r}}$$

$$V = \int \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

<u>*Nombre de la magnitud y fórmula::*</u>
Energía potencial gravitatoria

$$E_p = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r}$$

<u>*Significado de los símbolos de la fórmula y unidad:*</u>
E_p: Energía potencial gravitatoria (J);
G: Constante de Gravitación Universal (Nm^2 kg^{-2})
m y m´: Masas que se atraen (kg);
r: Distancia entre las dos masas (m)

<u>*Definición de la magnitud*</u>:
Es el trabajo que realiza el campo gravitatorio para llevar una de las masas desde el punto donde se encuentra hasta el infinito.

$$V = \frac{E_p}{m'}$$

$$E_p = m' \cdot V$$

<u>*Nombre de la magnitud y fórmula:*</u>
Potencial gravitatorio

$$V = -G \cdot \frac{m}{r}$$

<u>*Significado de los símbolos de la fórmula y unidad:*</u>
V: Potencial gravitatorio (J/kg);
G: Constante de Gravitación Universal (Nm^2 kg^{-2})
m: Masa que crea el campo gravitatorio(kg).
r: Distancia entre la masa que crea el campo y el punto donde se calcula el potencial (m).

<u>*Definición de la magnitud:*</u>
Es el trabajo que realiza el campo gravitatorio sobre la unidad de masa para trasladarla desde el punto donde se encuentra hasta el infinito.